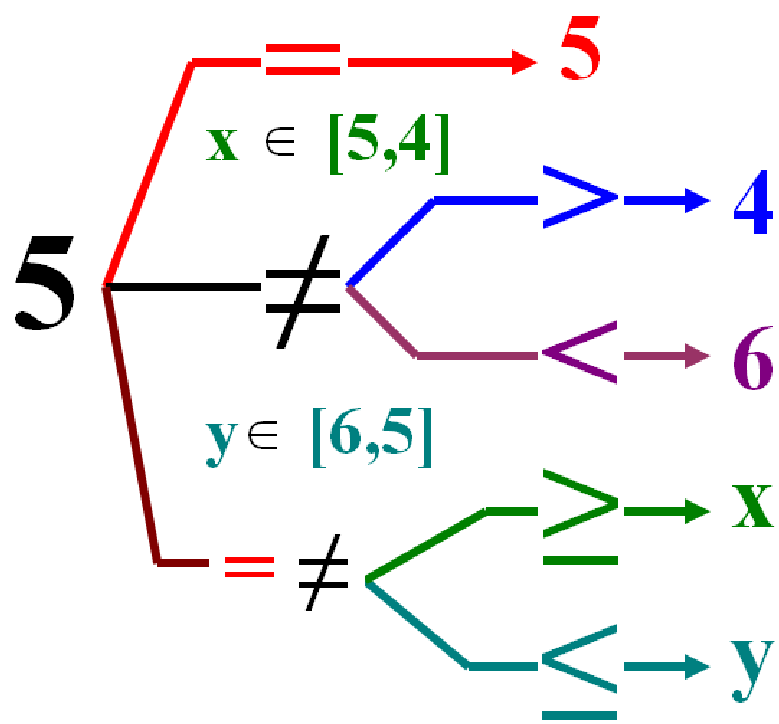
بسـم الله الرحمـن الرحـيم

المتباينات الجبريه الهندسيه المثلثاتيه العدديه



أعتدنا على علاقة التساوي في الروابط و القوانين الرياضية و الفيزيائية ، لكن لا ترتبط متغيرات جميع القوانين و الراوبط في طرفين القانون أو الرابطة بعلاقة التساوي فقط ، كثير من الروابط و المعادلات تخرج عن حالة التساوي الى حالة متباينة يرتبط بها الطرف الأيمن بالطرف الأيسر بعلامة الأكبر أو الأصغر مكوناً موضوعاً واسعاً في الرياضيات يعرف بموضوع المتباينات و هو موضوع يوازي بالوسعة موضوع المعادلات و القوانين و الروابط التي تربط الطرف الأيمن بالطرف الأيسر بعلامة التساوي .

المتباينات (inequalities) يمكن أن تكون عبارات جبرية أو عددية أو مثلثاتية أو قضايا و مبرهنات هندسية تدخل في بحث القيّم الصغرى و الدنيا ، يعتمد حل و إثبات مسائل المتباينات على المهارة و الإنتباه و التسلط على نتائج المتباينات الأساسية ، أو المشهورة و هذا ما دفعنا الى سرد أهم المتباينات و إعطاء أمثلة متنوعة عليها .

في مسابقات أولمبياد الرياضيات لموضوع المتباينات أهمية بالغه ، حيث لا تخلو أكثر دورات الأولمبياد من مسائل المتباينات . الهدف من هذا البحث هو التعرف على موضوع المتباينات و أشهرها و كيفية إستخدامها مع علائمها و شروطها من خلال أمثلة متعددة و متنوعة مع شرح توضيحي و تفصيلي لكل مثال . أكتفيت بأشهر المتباينات و أكثرها إستخداماً و تجنبت المتباينات المعقدة التي ينحصر إستخدامها على مواضيع خاصة و متقدمة في الرياضيات كمتباينة (**Maclaurin's inequality**) أو متباينة (**Chebychev's inequality**) في الإحتمالات ، و ما تجدونه في هذا البحث إنشاء الله سيكفي و يرضي .

لم أستطرق لموضوع اللا معادلات (inequation) و منظومة اللا معادلات و إكتفيت بالمتباينات فقط . مثلاً في هذه اللا معادلة $x^2-(m+1)x+m^2\geq 2$ يطلب قيمة m ليصبح الطرف الأيسر أكبر أو يساوي 2 ، أو في هذه المنظومة من اللا معادلات المطلوب قيمة x و y لتتحقق علامة الأكبر

$$\begin{cases} x+y>2 \\ y^2-2x-1>0 \end{cases}$$

عند حل مسائل المتباينات يجب الإنتباه على شروط المسئلة و فرضياتها ، و في أكثر الحالات تساعد الفرضيات على الحل و إختصار الروابط و العلاقات ، تعطي علاقة الأكبر و الأصغر إمكانية حذف أو إضافة بعض الجمل المنطقية من أحد الطرفين مع الحفاظ أو عدم الحفاظ على جهة العلاقة و هذا ما لا يمكن تطبيقه في الروابط التي فيها العلاقة تساوي ، على سبيل المثال إذا كانت a و b أعداد حقيقية أكبر أو تساوي صفر أحد الروابط الحاكمة على هذين العددين $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \Rightarrow (a+b)^2\geq a^2+b^2$ ساعد شرط المسئلة $a,b\geq 0$ على حذف الجملة $2ab$ و تحويل التساوي الى أكبر أو يساوي ، يمكن التعامل مع $(a+b)^2\geq a^2+b^2$ على إنها متباينة نستطيع إستخدامها في حل مسائل المتباينات . بعض المتباينات يمكن إثباتها عن طريق الإستقراء الرياضي .

المتباينات الجبريه

بعض الروابط العامة التي يمكن الإستعانة بها في مسائل المتباينات

a أكبر من b $a > b$

a أصغر من b $a < b$

a أكبر من أو تساوي b $a \geq b$

a أصغر من أو تساوي b $a \leq b$

عددين مثل a و b بالنسبة لبعضهما ، إما متساويان $a = b$ و إما غير متساويان $a \neq b$ في هذه الحالة إما $a < b$ أو $a > b$

الأعداد الموجبة أكبر من صفر ، و الأعداد السالبة أصغر من الصفر و لأي مقدار من k و a يمكن كتابة $a^{2k} \geq 0$

إضافة مقدار سالب أو موجب لطرفين المتباينة لا يغير جهة العلامة

$$x < y \Rightarrow x \pm \alpha < y \pm \alpha$$

ضرب طرفين المتباينة بعدد موجب لا يغيّر جهة الأكبر أو الأصغر، نفرض $\alpha > 0$

$$x < y \Rightarrow \alpha x < \alpha y$$

تقسيم طرفين المتباينة على عدد موجب لا يغيّر جهة العلامة

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{\alpha} x < \frac{1}{\alpha} y$$

ضرب طرفين المتباينة بعدد سالب يغيّر جهة العلامة ، نفرض $\alpha < 0$

$$x < y \Rightarrow \alpha x > \alpha y$$

تقسيم طرفين المتباينة على عدد سالب يغيّر جهة العلامة $\alpha < 0$

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{\alpha} x > \frac{1}{\alpha} y$$

$$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{array}\right\} \Rightarrow ac < bd$$

لكل a و b و c و d

$$a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

$$a \geq b \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$$

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ b < c \end{array}\right\} \Rightarrow a < c$$

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \Rightarrow a + b < c + d$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b \leq c \\ e + d \leq f \end{array}\right\} \Rightarrow a + b + e + d \leq c + f$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{If} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{If} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

متباينة الوسط الحسابي الهندسي Inequality Arithmetic - Geometric Means

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}$$

$$\boxed{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right] \geq \left[\prod_{i=1}^{n} a_i\right]^{\frac{1}{n}}}$$

نستعين بهذه المتباينة $e^x \geq x + 1$ للإثبات

نفرض $S_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}$

نفرض $x = \frac{x_i}{S_n} - 1$ بحيث $i = 1, 2, \cdots, n$

$$e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^{\frac{x_i}{S_n} - 1} \geq \frac{x_i}{S_n} \Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(e^{\frac{x_i}{S_n} - 1}) \geq \prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{S_n})$$

$$\prod_{i=1}^{n}(e^{\frac{x_i}{S_n} - 1}) \geq \prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{S_n}) \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} Exp(\frac{x_i}{S_n} - 1) \geq \prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{S_n})$$

$$\prod_{i=1}^{n} Exp(\frac{x_i}{S_n} - 1) \geq \prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{S_n}) \Rightarrow Exp(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{S_n} - n) \geq \prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{S_n})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x > 0 \\ x + \frac{1}{x} \geq 2 \end{array}}$$

$$Exp(n - n) \geq \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{S_n^n} \Rightarrow 1 \geq \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{S_n^n} \Rightarrow S_n \geq (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$$

أي :

$$\boxed{\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}}$$

الحالة العامة إذا كانت $a = a_1 + a_2 + \cdots a_n$

$$\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n}{a} \geq \sqrt[a]{x_1^{a_1} \times x_2^{a_2} \times \cdots \times x_n^{a_n}}$$

متباينة جنسن Jensen's Inequality

نفرض الدالة $f(x)$ محدبة من متغيرواحد و المقادير $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in R$

بشرط $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \geq 0$ و $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 1$ في هذه الحالة :

$$f(a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2 + \cdots + a_n \times x_n) \leq a_1 \times f(x_1) + a_2 \times f(x_2) + \cdots + a_n \times f(x_n)$$

الدالة المحدبة هي الدالة التي منحنيها فوق خط المماس ، كذلك يمكن التأكد من إن الدالة محدبه في حالة وجود مشتقها الثاني في فاصلة معينة يجب أن يكون المشتق الثاني في تلك الفاصلة أكبر من صفر . الدوال x^2 و e^x و $|x|$ و $x \ln x$ دوال محدبة (convex) و $\sqrt{x}$ و $\ln x$ دوال مقعرة (concave) .

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$$

بشرط $\lambda_i \geq 0$ ، $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

إذا كان $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$ في هذه الحالة :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

مثال : إثبت في كل مثلث $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f(x) = -\sin(x)$ و $x \in [0,\pi]$ دالة محدبه و $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ و $x_1 = A$ و

$x_2 = B$ و $x_3 = C$ هذه الزوايا الداخليه للمثلث إذن :

$$\sin(\frac{A+B+C}{3}) \ge \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin(\frac{180}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

العلامة تغيّرت جهتها لوجود علامة الناقص أمام الدالة ، و وجودها في طرفين المتباينة حيث ضرب طرفين المنباينة في 1- و أدى لتغير جهة الأكبر الى أصغر .

مثال : إذا كان $x \ge 0$ و $y \ge 0$ و $\alpha + \beta = 1$ إثبت :

$$\sqrt{\alpha x + \beta y} \ge \alpha\sqrt{x} + \beta\sqrt{y}$$

$f(x) = -\sqrt{t-1}$ الدالة محدبة $t > 1$ و $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \le \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

$x_1 = a$ و $x_2 = b$

$$-\sqrt{\alpha a + \beta b - 1} \le -\alpha\sqrt{a-1} - \beta\sqrt{b-1}$$

$$-\sqrt{\alpha a + \beta b - (\alpha+\beta)} \le -\alpha\sqrt{a-1} - \beta\sqrt{b-1}$$

$$\sqrt{\alpha(a-1) + \beta(b-1)} \ge \alpha\sqrt{a-1} + \beta\sqrt{b-1}$$

نفرض $x = a - 1 \ge 0$ و $y = b - 1 \ge 0$

$$\sqrt{\alpha x + \beta y} \ge \alpha\sqrt{x} + \beta\sqrt{y}$$

متباينة كوشي – تشفارتز Cauchy – Schwarz Inequality

a_i و b_i أعداد حقيقية

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

$a_i > 0$ و $b_i > 0$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n \le (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2})(\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2})$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2) \ge (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2$$

في بُعدين

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \ge (ac + bd)^2$$

متباينة كوشي – تشفارتز هي حالة خاصة من متباينة هولدير (Hölders Inequality)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{q}}$$

في متباينة كوشي – تشفارتز $p = q = 2$

متباينة وسط قوى Power Mean Inequality

$$\sqrt[r]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^r} \le \sqrt[s]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^s}$$

بشرط : $r \ne 0$ و $s \ne 0$ و $r < s$

لكل $x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$ و $r \ne 0$

$$P_r = \left(\frac{x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

في حالة $r = 1$

$$P_1 = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

في حالة $r = 2$

$$P_2 = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

في جالة $r = -1$

$$P_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

في حالة $r = 0$ لا يمكن الإستعانة بهذه الرابطة و الرابطة التي يستعان بها في هذه الحالة هي :

$$P_0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n}$$

في حالة $r > s$ و $s \ge 0$ متباينة وسط قوى بهذا الشكل $P_r \ge P_s$ كل من الحالات التالية هي لنوع من المتباينات :

$P_1 \ge P_0$ (the AM-GM inequality)

$P_0 \ge P_{-1}$ (the GM-HM inequality, HM is for harmonic mean وسط توافقي)

$P_1 \ge P_{-1}$ (the AM-HM inequality)

متباينة برنولي Bernouli's Inequality

لكل $x > -1$ إذا كان $n \le 0$ أو $n \ge 1$ في هذه الحالة :

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

إذا كان $0 \le n \le 1$ في هذه الحالة :

$$(1+x)^n \le 1+nx$$

إذا كان e عدد أويلر $e = 2.718...$

$$(1+x)^r \le e^{rx}$$

$$(1+\frac{1}{k})^k \le e$$

يمكن إثبات مبرهنة برنولي من هذه الرابطة

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{1}{2}n(n-1)x^2+\cdots$$

كذلك من هذه الرابطة يمكن إستنتاج هذه المتباينة

$$(1-y)^n = 1-ny+\frac{1}{2}n(n-1)y^2+\cdots$$

$$(1-y)^n \ge 1-ny$$

متباينة نيسبت Nesbitt’s Inequality

إذا كان $a,b,c>0$ في هذه الحالة

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

متباينة هولدر Hölder's inequality

لكل $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ و $y_1,y_2,\cdots,y_n>0$ و $r+s=1$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^r(y_1+y_2+\cdots+y_n)^s\geq(x_1^r y_1^s+x_2^r y_2^s+\cdots+x_n^r y_n^s)$$

متباينة منكوفسكي Minkowski's inequality

لكل $a_1,a_2,\cdots,a\geq0$ و $b_1,b_2,\cdots,b_n\geq0$ و $r>1$

$$\sqrt[r]{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}+\sqrt[r]{b_1^r+b_2^r+\cdots+b_n^r}\geq\sqrt[r]{(a_1+b_1)^r+(a_2+b_2)^r+\cdots+(a_3+b_3)^r}$$

متباينة التنسيق الجديد Rearrangement inequality

لكل $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$ و $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

بصورة عامة لكل عدد حقيقي $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$ و $y_1\leq y_2\leq\cdots\leq y_n$

$$x_ny_1+x_{n-1}y_2+\cdots+x_1y_n\leq x_{\sigma(1)}y_1+x_{\sigma(2)}y_2+\cdots+x_{\sigma(n)}y_n\leq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

$x_{\sigma(1)}$ و $x_{\sigma(2)}$ و ... و $x_{\sigma(n)}$ تعرف بإسم التبديلة أو permutation

متباينة مجموع المربعات Sum of Squares inequality

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\leq\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

متباينة جنسن Jensen's Inequality

$$F\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F(x_i)$$

بشرط $a_i>0$ و $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$

متباينة الوسط الحسابي – الهندسي

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

متباينة تشيبشيف Chebyshev's inequality

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i b_i}{n}\ge\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i}{n}\right)$$

$x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge 0$ و $y_1\ge y_2\ge\cdots\ge y_n\ge 0$ و $z_1\ge z_2\ge\cdots\ge z_n\ge 0$

$$\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{n}\ge\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$$

لثلاثة متغيرات :

$$\frac{x_1y_1z_1++\cdots+x_ny_nz_n}{n}\ge\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right)\left(\frac{z_1+\cdots+z_n}{n}\right)$$

برهان متباينة نيسبت

إذا كان $a,b,c>0$ في هذه الحالة

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

مع إضافة 3 الى طرفين المتباينة

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

$$(a+b+c)[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}]\geq\frac{9}{2}$$

نظرب طرفين المتباينة في 2

$$(2a+2b+2c)[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}]\geq 9$$

$$[(b+c)+(a+c)+(a+b)][\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}]\geq 9$$

$$\frac{(b+c)+(a+c)+(a+b)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}}$$

و هذه الرابطة صادقة طبق متباينة **الوسط الحسابي - الوسط التوافقي** GM-HM inequality

خلاصة لأشهر و أهم المتباينات

خلاصه لأشهر المتباينات نذكرها هنا بأبسط صورها و بإختصار لسهولة حفظها و مراجعتها ، يمكن الإستعانة بها لإثبات و إستنتاج أنواع المتباينات

متباينة الوسط الحسابي الهندسي Inequality of Arithmetic - Geometric Means

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad ، \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad ، \quad \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}$$

متباينة كوشي – تشفارتز Cauchy – Schwarz Inequality

$a_i > 0$ و $b_i > 0$

$$a+b+c \leq \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$ax+bx+cx \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n \leq (\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2})(\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2})$$

متباينة جنسن Jensen's Inequality

نفرض الدالة $f(x)$ محدبة من متغيرواحد و المقادير $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n \in R$

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

بشرط $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n \geq 0$ و $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=1$ في هذه الحالة :

$$f(a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2 + \cdots + a_n \times x_n) \leq a_1 \times f(x_1) + a_2 \times f(x_2) + \cdots + a_n \times f(x_n)$$

متباينة هولدر Hölder's inequality

لكل $x_1,x_2,\cdots,x_n > 0$ و $y_1,y_2,\cdots,y_n > 0$ و $r+s=1$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^r(y_1+y_2+\cdots+y_n)^s \geq (x_1^r y_1^s + x_2^r y_2^s + \cdots + x_n^r y_n^s)$$

متباينة تشيبيشيف Chebyshev's inequality

$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ و $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$

$$\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{n} \geq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$$

$$\frac{ax+by+cz}{3} \geq (\frac{a+b+c}{3})(\frac{x+y+z}{3})$$

Rearrangement inequality متباينة التنسيق الجديد

لكل $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$ و $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \le a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

Minkowski's inequality متباينة منكوفسكي

لكل $a_1, a_2, \cdots, a \ge 0$ و $b_1, b_2, \cdots, b_n \ge 0$ و $r > 1$

$$\sqrt[r]{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r} + \sqrt[r]{b_1^r + b_2^r + \cdots + b_n^r} \ge \sqrt[r]{(a_1+b_1)^r + (a_2+b_2)^r + \cdots + (a_3+b_3)^r}$$

Nesbitt's Inequality متباينة نيسبت

إذا كان $a, b, c > 0$ في هذه الحالة

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

Bernouli's Inequality متباينة برنولي

لكل $x > -1$ إذا كان $n \le 0$ أو $n \ge 1$ في هذه الحالة :

$$(1+x)^n \ge 1 + nx$$

Power Mean Inequality متباينة وسط قوى

لكل $x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$

$$P_r = \left(\frac{x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \quad ، \quad r \ne 0$$

$$P_0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} \quad ، \quad r = 0$$

$s \ge 0$
$r > s$
$P_r \ge P_s$

$P_1 \ge P_0$ (the AM-GM inequality)

$P_0 \ge P_{-1}$ (the GM-HM inequality, HM is for harmonic mean وسط توافقي)

$P_1 \ge P_{-1}$ (the AM-HM inequality)

$$P_{-1} \le P_0 \le P_1$$

Harmonic, Geometric and Arithmatic Mean

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_3} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

أمثلة متنوعة حول المتباينات

مثال : إذا كانت m و n عددين صحيحين و موجبين إثبت ، $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ إذا و فقط إذا $\sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n}$

نفرض $\frac{m}{n} = x$ إذن :

$$x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{1+x} > \sqrt{2}$$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{m}{n}} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{m+n}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{m+2n}{m+n} > \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n}$$

مثال : إذا كان $a,b,c > 0$ و $abc = 1$ إثبت $\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3$

بما إن $abc = 1$ لذلك

$$\frac{1+ab}{1+a} = \frac{abc+ab}{1+a} = ab\left(\frac{1+c}{1+a}\right)$$

كذلك للعبارتين الآخرتين فيصبح لدينا

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} = ab\left(\frac{1+c}{1+a}\right) + bc\left(\frac{1+a}{1+b}\right) + ac\left(\frac{1+b}{1+c}\right)$$

نستعين بمتباينة الوسط الحسابي الهندسي لثلاث عبارات

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 \times x_2 \times x_3}$$

$$ab\left(\frac{1+c}{1+a}\right) + bc\left(\frac{1+a}{1+b}\right) + ac\left(\frac{1+b}{1+c}\right) \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3$$

إذن : $\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3$

مثال : إذا كانت a و b و c أعداد موجبة و $a+b+c=1$ إثبت

$(\frac{1}{a}+1)(\frac{1}{b}+1)(\frac{1}{c}+1)\geq 64$

من متباينة الوسط الحسابي الهنسي

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geq\sqrt[3]{x_1\times x_2\times x_3}$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\leq(\frac{a+b+c}{3})^3=\frac{1}{27}$$

$$(\frac{1}{a}+1)(\frac{1}{b}+1)(\frac{1}{c}+1)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{abc}$$

نستعين بمتباينة الوسط الحسابي الهنسي لكل من $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ و $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{abc}\geq 1+\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^2}}+\frac{1}{abc}$$

$$1+\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^2}}+\frac{1}{abc}=(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}})^3\geq 4^3$$

إذن :

$$(\frac{1}{a}+1)(\frac{1}{b}+1)(\frac{1}{c}+1)\geq 64$$

مثال : إذا كانت a و b و c أعداد موجبة و $a+b+c=1$ إثبت

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}$$

نستعين بمتباينة جنسن

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\leq\frac{1}{3}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]$$

الدالة $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ محدبة لأن

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{4+2x}{(1-x)^4}>0$$

$x_1=a$ و $x_2=b$ و $x_3=c$

$$\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-b)^2}+\frac{c}{(1-c)^2}\geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

من خلال هذا الشرط $a+b+c=1$ يصبح

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq 3f\left(\frac{1}{3}\right)=3\times\frac{1/3}{(1-1/3)^2}=\frac{9}{4\times 1}$$

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4\times(a+b+c)}$$

مثال : لأي المقادير الحقيقية من x تصدق هذه العبارة

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

نضرب بسط و مقام الطرف الأيمن في $(1+\sqrt{1+2x})^2$

$$\frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2(1+\sqrt{1+2x})^2} = (1+\sqrt{1+2x})^2 < 2x+9$$

$$1+2\sqrt{1+2x}+1+2x < 2x+9 \Rightarrow x < \frac{45}{8}$$

مثال : إذا كانت a و b أعداد حقيقة و $a+b=1$ إثبت

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$$

نستعين بمتباينة جنسن

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

الدالة $f(x)=(x+\frac{1}{x})^2 \Rightarrow f(x)=\frac{6}{x^4}+2$

$x_2=b$ و $x_1=a$

$$(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b})^2 \leq \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})^2+\frac{1}{2}(b+\frac{1}{b})^2$$

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq (\frac{1}{2}+\frac{2}{1})^2 = \frac{25}{4}$$

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{4}$$

مثال : إذا كانت a و b و c أعداد موجبة و $abc=1$ إثبت

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$$

من متباينة الوسط الحسابي الهندسي

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geq\sqrt[3]{x_1\times x_2\times x_3}$$

$x_1=a$ و $x_2=b$ و $x_3=c$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}=a$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}}=\sqrt[3]{\frac{b^3}{abc}}=b$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{c^2}{bc}}=\sqrt[3]{\frac{c^3}{abc}}=c$$

جمع هذه المتباينات

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$$

في الصفحة القادمة نستعين بمتباينة التنسيق الجديد لإثبات هذه المتباينة

مثال : إذا كانت a و b و c أعداد موجبة و $abc=1$ إثبت

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c$$

نستعين بمتباينة التنسيق الجديد

$$x_n y_1+x_{n-1}y_2+\cdots+x_1y_n\le x_{\sigma(1)}y_1+x_{\sigma(2)}y_2+\cdots+x_{\sigma(n)}y_n\le x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

$$a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3\le a_1'b_1+a_2'b_2+a_3'b_3\le a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

المتغيرات

$$a_1=\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad و \quad a_2=\sqrt[3]{\frac{b}{c}} \quad و \quad a_3=\sqrt[3]{\frac{c}{a}}$$

$$b_1=\sqrt[3]{(\frac{a}{b})^2} \quad و \quad b_2=\sqrt[3]{(\frac{b}{c})^2} \quad و \quad b_3=\sqrt[3]{(\frac{c}{a})^2}$$

التبديلة Permutation

$$a_1'=\sqrt[3]{\frac{b}{c}} \quad و \quad a_2'=\sqrt[3]{\frac{c}{a}} \quad و \quad a_3'=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\times\sqrt[3]{(\frac{a}{b})^2}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\times\sqrt[3]{(\frac{b}{c})^2}+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\times\sqrt[3]{(\frac{c}{a})^2}\le\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\times\sqrt[3]{(\frac{a}{b})^2}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\times\sqrt[3]{(\frac{b}{c})^2}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\times\sqrt[3]{(\frac{c}{a})^2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{cb}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ba}}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{acb}}+\sqrt[3]{\frac{b^3}{abc}}+\sqrt[3]{\frac{c^3}{bac}}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

من شرط المسئلة $abc=1$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c$$

مثال : إذا كانت a و b و c أعداد موجبه إثبت

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

التبديلات : $x_1=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $\quad x_2=\sqrt{\frac{b}{c}}$ $\quad x_3=\sqrt{\frac{c}{a}}$

$y_1=\sqrt{ab}$ $\quad y_2=\sqrt{bc}$ $\quad y_3=\sqrt{ca}$

من متباينة كوشي تشفارتز

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$$

$$a+b+c=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\leq\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}\times\sqrt{ab+bc+ca}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

مثال : إذا كانت a و b أعداد موجبه أصغر من واحد $a,b<1$ إثبت

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\geq\frac{2}{1-ab}$$

من متباينة الوسط الحسابي الهندسي

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\geq 2\sqrt{(\frac{1}{1-a^2})(\frac{1}{1-b^2})}=\frac{2}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}$$

$$(1-a^2)(1-b^2)=1-b^2-a^2+a^2b^2\leq 1-2ab+a^2b^2=(1-ab)^2$$

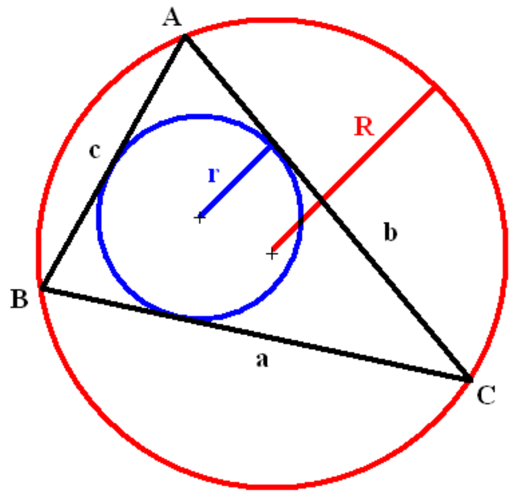
$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\geq\frac{2}{\sqrt{(1-ab)^2}}$$

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\geq\frac{2}{1-ab}$$

المتباينات الهندسية

بعض أهم الروابط الهندسية التي تساعد على إثبات بعض المتباينات الهندسية

إذا كانت A و B و C الزوايا الداخلية للمثلث ΔABC و a و b و c طول الأضلع المقابلة لهذه الزوايا



R نصف قطر الدائرة المحيطة للمثلث

r نصف قطر الدائرة المحاطة بالمثلث

$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ نصف محيط المثلث

S_{ABC} مساحة المثلث

$a+b+c=2s$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ رابطة الجيب

$a^2=b^2+c^2-2ab\cos A$ رابطة الجيب تمام

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

$$S_{ABC}=\frac{abc}{4R}$$

$$S_{ABC}=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=sr$$

$$S_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$ab+bc+ca=s^2+r^2+4Rr$$

$$abc=4Rrs$$

$a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ متباينة ليبنتز

$R\ge 2r$ متباينة أويلر

في كل مثلث مجموع ضلعين أكبر من الضلع الثالث

$$a+b>c$$
$$a+c>b$$
$$b+c>a$$

في كل مثلث الضلع المقابل للزاوية الأكبر ، أكبر من الضلع المقابل للزاوية الأصغر

مبرهنة متساويات المحيط Isoperimetric theorem

من بين جميع المنحنيات المتساوية المحيط في الصفحة مساحة الدائرة هي المساحة الأكبر

(المنحنيات المغلقة التي لا تقطع نفسها)

$$\left.\begin{array}{l} A=\pi R^2 \\ P=2\pi R \end{array}\right\} \Rightarrow A \le \frac{P^2}{4\pi}$$

من بين جميع المثلثات المتساوية المحيط في الصفحة مساحة المثلث المتساوية الأضلع هي المساحة الأكبر

$$\left.\begin{array}{l} A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 \\ P=3a \end{array}\right\} \Rightarrow A \le \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{P}{3}\right)^2$$

مثال : إذا كانت a و b و c طول أضلع المثلث و A مساحته إثبت

$a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}A$

من مبرهنة متساويات المحيط للمثلث

$$A \le \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{P}{3}\right)^2$$

$$P=a+b+c \Rightarrow A \le \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

نستعين بمتباينة كوشي – تشفارتز

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

$b_i=1$ و $a_1=a$ و $a_2=b$ و $a_3=c$ إذن :

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$A \le \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \Rightarrow A \le \frac{\sqrt{3}}{3\times 4}(a^2+b^2+c^2)$$

إذن :

$$a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}A$$

هذه المسئلة من أولمبياد الرياضيات لعام 1961

مثال : من المثال السابق و مثال الصفحات القادمه إثبت $a^2+b^2+c^2 \ge 9R^2$

$$r \le \frac{s}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 3\sqrt{3}r^2 \le A \Rightarrow 4\times 9r^2 \le 4\sqrt{3}A$$

$$\left.\begin{array}{l} 4\times 9r^2 \le 4\sqrt{3}A \\ r \le \dfrac{R}{2} \Rightarrow r^2 \le \dfrac{R^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\times 9\frac{R^2}{4} \le 4\sqrt{3}A \Rightarrow 9R^2 \le 4\sqrt{3}A$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}A \Rightarrow \qquad a^2+b^2+c^2 \ge 9R^2$$

مثال : إذا كانت a و b و c طول أضلع المثلث و r نصف قطر الدائرة المحاطة به إثبت

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{\sqrt{3}}{2r}$$

نستعين بهذه التبديلات :

$a=y+z$ و $b=z+x$ و $c=x+y$ إذن :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}$$

نستعين بمبرهنة $AM-GM$ الوسط الحسابي – الوسط الهندسي $\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\times a_2\times\cdots\times a_n}$

$$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\Rightarrow x+y\ge2\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{2\sqrt{xy}}$$

و هكذا $\frac{1}{y+z}\le\frac{1}{2\sqrt{yz}}$ و $\frac{1}{z+x}\le\frac{1}{2\sqrt{zx}}$ من جمع هذه المتباينات :

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$$

إذن :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)=\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}}$$

من متباينة كوشي - تشفارتز

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

$b_i=1$ و $a_1=\sqrt{x}$ و $a_2=\sqrt{y}$ و $a_3=\sqrt{z}$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\le3(x+y+z)$$

إذن :

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \leq 3(x+y+z) \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \sqrt{3}\sqrt{x+y+z}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{x+y+z}}{2\sqrt{xyz}}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{xyz(x+y+z)}}$$

نستعين بهذه التحويلات :

$b+c-a=2x$ و $c+a-b=2y$ و $a+b-c=2z$ إذا كان s نصف محيط المثلث إذن:

$$x+y+z=s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

A مساحة المثلث :

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A=\sqrt{\frac{a+b+c}{16}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$A=\sqrt{xyz(x+y+z)}$$

إذن :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{xyz(x+y+z)}} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{s}{A}$$

كذلك مساحة المثلث تحسب من هذه الرابطة $A=sr$ فيها r نصف قطر الدائرة المحاطة و s نصف محيط المثلث ، إذن :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}$$

مثال : إذا كانت a و b و c طول أضلع المثلث ABC و h_a و h_b و h_c طول الأعمدة على هذه الأضلع إثبت

$$\frac{a^2}{h_b h_c}+\frac{b^2}{h_a h_c}+\frac{c^2}{h_a h_b}\geq 4$$

مساحة المثلث نصف القاعدة في الإرتفاع

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ah_a$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bh_b$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ch_c$$

$$\frac{a^2}{h_b h_c}+\frac{b^2}{h_a h_c}+\frac{c^2}{h_a h_b}=\frac{a^2bc}{4S_{ABC}^2}+\frac{ab^2c}{4S_{ABC}^2}+\frac{abc^2}{4S_{ABC}^2}$$

$$\frac{a^2bc}{4S_{ABC}^2}+\frac{ab^2c}{4S_{ABC}^2}+\frac{abc^2}{4S_{ABC}^2}=\frac{abc(a+b+c)}{4S_{ABC}^2}$$

مساحة المثلث

$S_{ABC}=\frac{abc}{4R}$ في هذه الرابطة R نصف قطر الدائرة المحيطة للمثلث

$S_{ABC}=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{(a+b+c)r}{2}$ في هذه الرابطة r نصف قطر الدائرة المحاطة بالمثلث إذن :

$$\frac{abc(a+b+c)}{4S_{ABC}^2}=\frac{abc(a+b+c)}{4\frac{abc}{4R}\times\frac{(a+b+c)r}{2}}=\frac{2R}{r}\geq 4$$

$$\frac{a^2}{h_b h_c}+\frac{b^2}{h_a h_c}+\frac{c^2}{h_a h_b}\geq 4$$

مثال : إذا كان R نصف قطر الدائرة المحيطة للمثلث و r نصف قطر الدائرة المحاطة و s نصف محيط المثلث إثبت :

$$r \le \frac{s}{3\sqrt{3}} \le \frac{R}{2}$$

من متباينة الوسط الحسابي الهندسي

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \Rightarrow a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$$

محيط المثلث $a+b+c=2s$ كذلك من هذه الرابطة $abc=4Rrs$ نصل الى

$$8s^3 \ge 27(4Rrs)$$

من هذه الرابطة $R \ge 2r$ نصل الى

$$8s^3 \ge 27(8r^2 s) \Rightarrow s^2 \ge 27(r^2) \Rightarrow s \ge 3\sqrt{3}r \Rightarrow r \le \frac{s}{3\sqrt{3}}$$

كذلك :

$$R \ge 2r \Rightarrow r \le \frac{R}{2}$$

$$\frac{s}{3\sqrt{3}} = \frac{a+b+c}{2\times 3\sqrt{3}}$$

$$a+b+c \le \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$$ **متباينة ليبنتز**

$$a+b+c \le 3\sqrt{3}R \Rightarrow \frac{s}{2\times 3\sqrt{3}} \le R$$

من متباينة أويلر $R \ge 2r$ نصل الى :

$$\frac{s}{3\sqrt{3}} \le \frac{R}{2}$$

إذن:

$$r \le \frac{s}{3\sqrt{3}} \le \frac{R}{2}$$

مثال : إذا كانت a و b و c طول أضلع المثلث و R نصف قطر الدائرة المحيطة إثبت

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{1}{R^2}$$

$$S_{ABC}=\frac{abc}{4R}=\frac{a+b+c}{2}r$$ مساحة المثلث

$$(a+b+c)\frac{r}{2}=(abc)\frac{1}{4R}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{1}{2Rr}\\[2em] R\geq 2r\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{1}{R^2}$$

مثال : إذا كانت A و B و C الزوايا الداخليه للمثلث إثبت :

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq\frac{9}{4}$$

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{1}{2R}$$ قانون الجيب

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$$

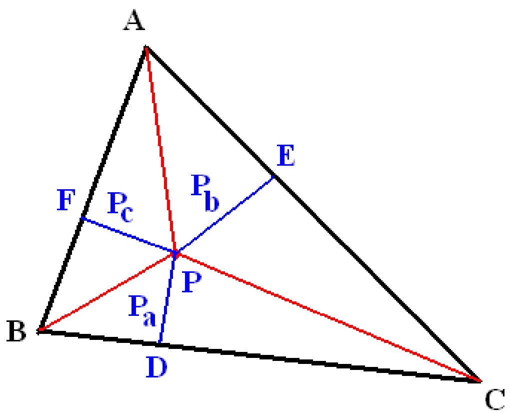
نستعين بمتباينة ليبنتز $a^2+b^2+c^2\leq 9R^2$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}=\frac{1}{4R^2}(a^2+b^2+c^2)\leq\frac{1}{4R^2}\times 9R^2=\frac{9}{4}$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq\frac{9}{4}$$

مثال : إذا كانت P نقطة داخل المثلث ABC و P_a و P_b و P_c الفاصلة القائمة من النقطة P بالترتيب الى أضلع المثلث BC و AC و AB إثبت

$$PA+PB+PC\geq 2(P_a+P_b+P_c)$$



تعرف هذه المتباينة ، بمتباينة إردوس - موردل

Erdös-Mordell Inequality

$$PE\perp AC \qquad BC=a$$
$$PF\perp AB \qquad AC=b$$
$$PD\perp BC \qquad AB=c$$

$$\angle DPE=180-C\Rightarrow \cos\angle DPE=-\cos C$$

$$DE=\sqrt{P_a^2+P_b^2+2P_aP_b\cos C}=\sqrt{(P_a\sin B+P_b\sin A)^2+(P_a\cos B-P_b\cos A)^2}$$

$$\sqrt{(P_a\sin B+P_b\sin A)^2+(P_a\cos B-P_b\cos A)^2}\geq P_a\sin B+P_b\sin A$$

$$PC=\frac{DE}{\sin C}\geq\frac{P_a\sin B+P_b\sin A}{\sin C}$$

$$PC\geq\frac{P_a\sin B+P_b\sin A}{\sin C}$$

كذلك لكل من PA و PB

$$PA\geq\frac{P_c\sin B+P_b\sin C}{\sin A}$$

$$PB\geq\frac{P_c\sin A+P_a\sin C}{\sin B}$$

نجمع هذه الروابط

$$PC+PA+PB\geq\frac{P_a\sin B+P_b\sin A}{\sin C}+\frac{P_c\sin B+P_b\sin C}{\sin A}+\frac{P_c\sin A+P_a\sin C}{\sin B}$$

$$PC + PA + PB \ge P_a\left(\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C}\right) + P_b\left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\right) + P_c\left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\right) \ge 2(P_a + P_b + P_c)$$

إستعنا بهذه المتباينة $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \ge 2$ لذلك $P_a\left(\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C}\right) \ge 2P_a$

توضيح حول هذا المثال :

$$\Delta AFE \Rightarrow \frac{EF}{\sin A} = \frac{AE}{\sin \angle AFE} = \frac{AF}{\sin \angle FEA}$$

$$\Delta FPE \Rightarrow \frac{EF}{\sin A} = \frac{PE}{\sin \angle EFP} = \frac{AF}{\sin \angle FEP}$$

$$PF = (\frac{EF}{\sin A})\sin \angle FEP$$

$$AF = (\frac{EF}{\sin A})\sin \angle FEA = (\frac{EF}{\sin A})\cos \angle FEP \qquad \angle FEP + \angle FEP = 90^\circ$$

$$AF^2 + PF^2 = AP^2 \Rightarrow AP^2 = (\frac{EF}{\sin A})^2 \Rightarrow AP = \frac{EF}{\sin A}$$

و هكذا $PC = \frac{ED}{\sin C}$ و $PB = \frac{FD}{\sin B}$

$$A + B = 180 - C \Rightarrow \cos(A + B) = -\cos C$$

$$\sin A \sin B - \cos A \cos B = \cos C$$

$$2P_aP_b \cos C = 2P_aP_b \sin A \sin B - 2P_aP \cos A \cos B$$

$$P_a^2 = P_a^2 \sin^2 B + P_a^2 \cos^2 B$$

$$P_b^2 = P_b^2 \sin^2 A + P_b^2 \cos^2 A$$

$$P_a^2 + P_b^2 + 2P_aP_b \cos C =$$

$$= P_a^2 \sin^2 B + P_a^2 \cos^2 B + 2P_aP_b \sin A \sin B - 2P_aP_b \cos A \cos B + P_b^2 \sin^2 A + P_b^2 \cos^2 A$$

$$= (P_a \sin B + P_b \sin A)^2 + (P_a \cos B - P_b \cos A)^2$$

مثال : إثبت في كل مثلث قائم الزاوية $a^2 \geq \frac{3\sqrt{6}}{4}bc$ في هذه الرابطة a وتر المثلث

أضلاع المثلث $a,b,c >$

من متباينة الوسط الحسابي الهندسي

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

من متباينة كوشي - تشفارتز

$$a+b+c \leq \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

من هذه الرابطتين

$$\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \sqrt{3}\sqrt[3]{abc}$$

في مثلث القائم الزاوية $a^2 = b^2 + c^2$

$$\sqrt{2a^2} \geq \sqrt{3}\sqrt[3]{abc} \Rightarrow a \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{abc} \Rightarrow a^3 \geq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}abc$$

$$a^2 \geq \frac{3\sqrt{6}}{4}bc$$

المتباينات المثلثاتيه

مثال : إذا كان A و B و C الزوايا داخلي للمثلث إثبت

$$\sin A+\sin B+\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

من مبرهنة جنسن

نفرض الدالة $f(x)$ محدبة من متغيرواحد و المقادير $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\in R$

بشرط $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\ge 0$ و $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=1$ في هذه الحالة :

$$f(a_1\times x_1+a_2\times x_2+\cdots+a_n\times x_n)\le a_1\times f(x_1)+a_2\times f(x_2)+\cdots+a_n\times f(x_n)$$

الدالة $f(x)=-\sin x$ محدبه لأن مشتقها الثاني موجود و أكبر من صفر لأن

$0<x<\pi$ أي في هذه الفاصلة $\frac{d^2}{dx^2}(-\sin x)=\sin x>0$

$a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}$ و $x_1=A$ و $x_2=B$ و $x_3=C$

مجوع الزوايا الداخليه للمثلث 180 درجة

$$-\sin(\frac{A+B+C}{3})\le -\frac{1}{3}\sin A-\frac{1}{3}\sin B-\frac{1}{3}\sin C$$

$$3\sin(\frac{180}{3})\ge \sin A+\sin B+\sin C$$

$$\sin A+\sin B+\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

مثال : إذا كانت a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة تصدق في هذه الرابطة

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+d^2}=1$$

إثبت $abcd \geq 3$

نفرض : $a^2=\tan A$ و $b^2=\tan B$ و $c^2=\tan C$ و $d^2=\tan D$

$$\frac{1}{1+a^2}=\frac{1}{1+\tan^2 A}=\cos^2 A$$

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+d^2}\Rightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+\cos^2 D=1$$

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A$$

$$\sin^2 A=(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+\cos^2 D)-\cos^2 A$$

$$\sin^2 A=\cos^2 B+\cos^2 C+\cos^2 D$$

$$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

من متباينة الوسط الحسابي الهندسي

$$\cos^2 B+\cos^2 C+\cos^2 D\geq 3\sqrt[3]{\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 D}$$

$$\sin^2 A\geq 3\sqrt[3]{\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 D}$$

و هكذا لسائر المقادير

$$\sin^2 B\geq 3\sqrt[3]{\cos^2 A\cos^2 C\cos^2 D}$$

$$\sin^2 C\geq 3\sqrt[3]{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 D}$$

$$\sin^2 D\geq 3\sqrt[3]{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$

$$\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C\sin^2 D\geq 81\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 D$$

$$\frac{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C\sin^2 D}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 D}\geq 81\Rightarrow \tan^2 A\tan^2 A\tan^2 A\tan^2 A\geq 81$$

$$a^4b^4c^4d^4\geq 81\Rightarrow abcd\geq 3$$

المتباينات العددية

مثال : الرابطة التقريبية لمضروب الأعداد $n!$

$$n! > \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

e عدد نابير

π النسبه الثابتة

$$n! > \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow 5! = 120 > \sqrt{2\times 3.1415\times 5}\left(\frac{5}{2.7182}\right)^5 \Rightarrow 120 > 118.0191$$

مثال : إذا كانت n عدد طبيعي ، إثبت $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

من متباينة الوسط الحسابي الهندسي

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}$$

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n} \ge \sqrt[n]{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}$$

مجموع الأعداد الطبيعية $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} \ge \sqrt[n]{n!}$$

$$\frac{n+1}{2} \ge \sqrt[n]{n!} \Rightarrow n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

من خلال الروابط و الخواص العددية و بالإستعانة بأشهر المتباينات يمكن إستنتاج و إثبات المتباينات العددية

مثال : إذا كانت a و b و c أعداد موجبه $a,b,c>0$ و $ab+bc+ca=abc$ إثبت

$$\sqrt[b]{a}\sqrt[c]{b}\sqrt[a]{c}(a+b+c)\ge abc$$

من فرض المسئلة $ab+bc+ca=abc\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

التبديلات $a_1=\frac{1}{a}$ $a_2=\frac{1}{b}$ $a_3=\frac{1}{c}$

$x_1=ab$ $x_2=bc$ $x_3=ca$

متباينة جنسن : $f(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)\le a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+a_3f(x_3)$

الدالة : $f(t)=-\ln(t)\Rightarrow f''(t)>0$

$$\ln(a+b+c)\ge\frac{1}{a}\ln(ab)+\frac{1}{b}\ln(bc)+\frac{1}{c}\ln(ca)$$

$$\ln(a+b+c)\ge\ln(ab)^{\frac{1}{a}}+\ln(bc)^{\frac{1}{b}}+\ln(ca)^{\frac{1}{c}}$$

$$\ln(a+b+c)\ge\ln[(ab)^{\frac{1}{a}}\times(bc)^{\frac{1}{b}}\times(ca)^{\frac{1}{c}}]$$

$$(a+b+c)\ge[(ab)^{\frac{1}{a}}\times(bc)^{\frac{1}{b}}\times(ca)^{\frac{1}{c}}]$$

$$(a+b+c)\ge a^{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}\times b^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\times c^{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1-\frac{1}{b}$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1-\frac{1}{c}$$
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1-\frac{1}{a}$$

$$a+b+c\ge a^{1-\frac{1}{b}}\times b^{1-\frac{1}{c}}\times c^{1-\frac{1}{a}}=\frac{a}{\sqrt[b]{a}}\times\frac{b}{\sqrt[c]{b}}\times\frac{c}{\sqrt[a]{c}}$$

$$a+b+c\ge\frac{a}{\sqrt[b]{a}}\times\frac{b}{\sqrt[c]{b}}\times\frac{c}{\sqrt[a]{c}}$$

$$\sqrt[b]{a}\sqrt[c]{b}\sqrt[a]{c}(a+b+c)\ge abc$$

قضية الإستقراء الرياضي: أي مجموعه جزئيه من الأعداد الطبيعيه ، بحيث العدد واحد و تالي أي عدد هو كذلك عضو فيها ، هذه المجموعة الجزئيه تساوي مجموعة الأعداد الطبيعيه . إذا كانت S مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية N في هذه الحالة :

$$\left.\begin{array}{l} 1\in S \\ \\ \forall n: n\in S \Rightarrow n+1\in S \end{array}\right\} \Rightarrow S=N$$

$\forall$ مكمم كلي بمعنى لكل أو لأي أو لجميع

مثال : إثبت

$$2+4+6+\cdots 2n=n(n+1)$$

البرهان :

نفرض إن هذه العبارة تساوي P_n أي $P_n=2+4+6+\cdots 2n=n(n+1)$

تصدق هذه العبارة الى P_1 و P_2 و ... إستناداً على حكم الإستقراء نفرض إنها تصدق كذلك الى P_k ، أي هذه العبارة صادقة : $P_k=2+4+6+\cdots 2k=k(k+1)$. يجب إن نثبت صدق و صحة P_{k+1} إذن :

$$P_{k+1}=\underbrace{2+4+6+\cdots 2k}_{k(k+1)}+2(k+1)$$

أي :

$$P_{k+1}=k(k+1)+2(k+1)=(k+1)(k+2)$$

و هذا بمعنى $P_{k+1}=(k+1)(k+2)$ و الحكم صادق ، إستناداً على قضية الإستقراء .

مثال : إثبت صدق المتباينة التاليه من خلال قضية الإستقراء الرياضي ، للأعداد الصحيحة و الأكبر من صفر $(1+1^{-3})(1+2^{-3})(1+3^{-3})\cdots(1+n^{-3})<3-\frac{1}{n}$

نفرض $A(n)=(1+1^{-3})(1+2^{-3})(1+3^{-3})\cdots(1+n^{-3})$ بالنتيجة $A(n)=<3-\frac{1}{n}$ إذا كانت $n=1$ المتباينة صادقة ل $A(1)$ و $n=2$ صادقة ل $A(2)$ و ... الى $n=k$ نفرض صدقها ل $A(k)$ يجب أن نثبت صدقها ل $A(k+1)$ أي $A(k+1)<3-\frac{1}{k+1}$

$$A(k+1)=A(k)[1+(1+k)^{-3}]$$

$$A(k+1)<(3-\frac{1}{k})(1+\frac{1}{(1+k)^{3}})=3-[\frac{(k+1)^{3}-3k+1)}{k(k+1)^{3}}]$$

$$A(k+1)<3-[\frac{(k+1)^{3}-3k+1}{k(k+1)^{3}}]$$

يجب أن يكون $A(k+1)<3-\frac{1}{k+1}$ إذن :

$$\Rightarrow 3-[\frac{(k+1)^{3}-3k+1}{k(k+1)^{3}}]<3-\frac{1}{k+1}$$

$$-[(k+1)^{3}-3k+1]<-k(k+1)^{2}$$

$$[(k+1)^{3}-3k+1]>k(k+1)^{2}$$

$$k^{3}+3k^{2}+3k+1-3k+1>k^{3}+2k^{2}+k\Rightarrow k^{2}-k+2>0$$

$$k^{2}-k+2>0$$

نفرض $P(k)=k^{2}-k+2$ هذه العبارة ل $k=0$ تساوي $P(0)=2>0$ إذن هذه العبارة $P(k)$ لجميع المقادير من k أكبر من صفر و فرض الإستقراء $A(k+1)<3-\frac{1}{k+1}$ صادق ، إذن المتباينة :

$(1+1^{-3})(1+2^{-3})(1+3^{-3})\cdots(1+n^{-3})<3-\frac{1}{n}$ صادقة .

جلال الحاج عبد

2011 -2 – 20

المصادر :

Inequalities, A Mathematical Olympiad Approach, by (Radmila Bulajich Manfrino, Jose Antonio Gomez Ortega, Rogelio Valdez Delgado)

http://mathcircle.berkeley.edu/BMC4/Handouts/inequal/node2.html
http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/inequality.shtml#solution

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com