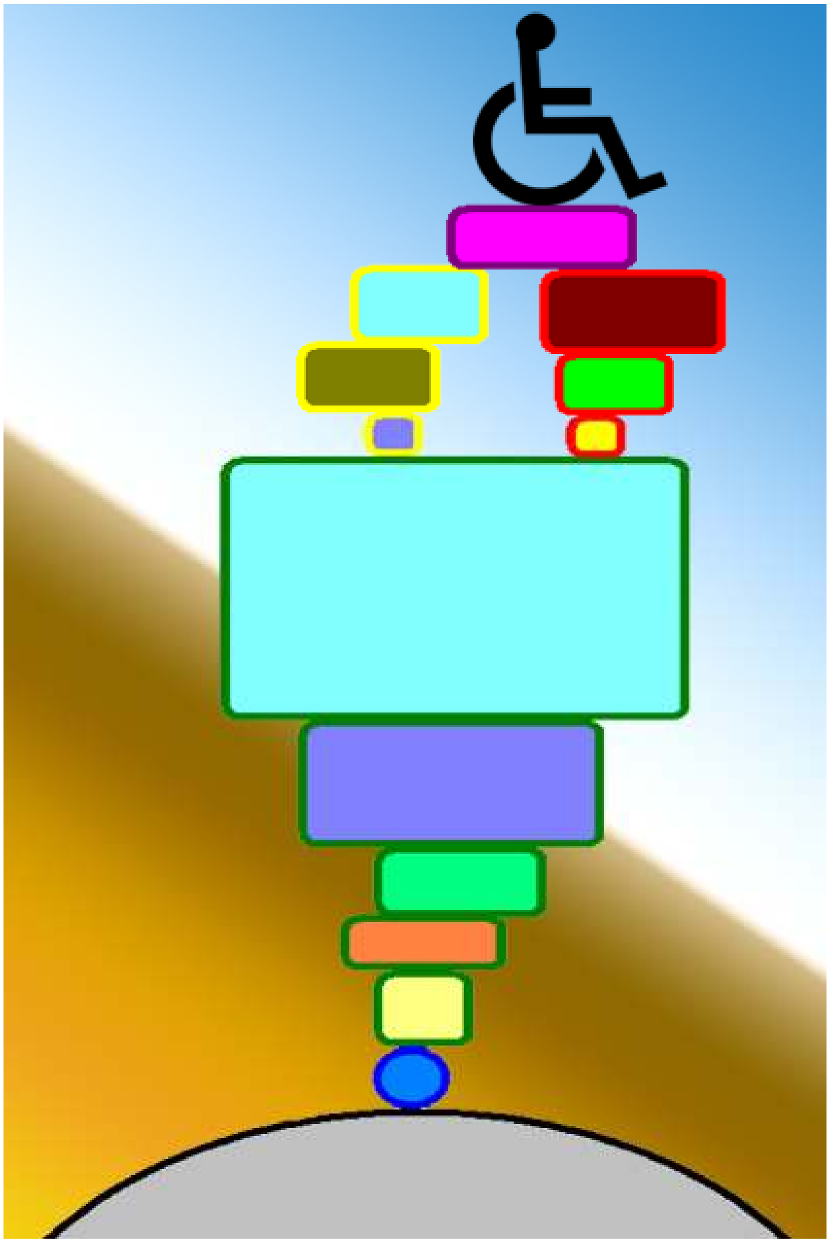
بســـم الله الرحـــمن الرحـــيم



الرياضيات و البُني الجبريه المجردة

النظرة البدائية للجبر المجرد أشبه بالنظرة الأولى الى لوحة فنية تجريدية أو تشكيلية تكون مقرونة بإعجاب و دهشة ، أو إستهزاء و تسخيف !

أحياناً تضع النظرة الكلاسيكية و التطبيقية ، الرياضيات الحديثة و جميع مواضيع نظرية الزمر في خانة السخافة . فنظرية المجموعات بكل عظمتها لاقت و واجهت أعتراضات شديدة ، و خاضّ جورج كانتور مبارزة مستميتة أمام منتقديه .

أحد مفاهيم التجريد هو نزع هيمنة بعض المفاهيم من بعض المواضيع ، تفقد مفاهيم التجريد قدرة السيطرة و الهيمنة على أي موضوع ، من هذا فليس هدف الجبر المجرد هو إنتزاع هيمنة الجبر التقليدي و البدائي من الذهن و إستبداله بهيمنة البُنى الجبرية المجردة .

ينظر البعض للرياضيات الحديثة و الجبر المجرد على الخصوص نظرة سخيفة لا في مواضيعمها فحسب و إنما كذلك في كيفية بيان مفاهيمها و زمان طرح هذه المفاهيم . لو أصبحت النظرة على الرياضيات نظرة أحادية متمركزة على الرياضيات التطبيقية و متمحورة حول الأعداد و الأشكال الهندسية فقط ، تصبح الرياضيات موضوع مادي و حسي تدخل عناصره الذهن من خلال الإحساس ، فتستسخف النظرة التجريدية و البحتة للرياضيات .

لماذا الزمر ؟ نتعامل في نظرية الأعداد مع مجموعات عددية و أعمال حسابية ، كذلك في الهندسة على أشكال و مسلمات كانت من الأزل ، لا يمكن تجاوزها و لاتخطيها . أعمال و أشكال دخلت الذهن و لم يقوم هو بأبداعها . أعمال قبلنا نتائجها البديهية دون أي برهان ، حتى حان آوان برهانها . لماذا الزائد في الناقص ، ناقص ؟ . لماذا تقتصر العمليات الحسابية على العمليات الأربعة فقط ، هل يمكن أن نعرف عملية أخرى ؟ هل يمكن تعريف مجموعات عناصرها أعداد و أشياء أخرى ؟ هل يمكن ربط تلك العمليات بهذه المجموعات ؟ للجواب بنعم على هذه الأسئلة علينا بنظرية الزمر .

لماذا الحلقة ؟ إذا قبلنا الزمر فلابد من شروط . تضعنا هذه الشروط أمام بُنى جبرية أخرى. لماذا عملية حسابية واحدة لماذا لاتكون عمليتان عندما تصبح البُنية الجبرية مجموعة مع عمليتين كالجمع و الضرب مع خصائص نقوم نحن بتعريفها هذه البُنية الجبرية هي الحلقة. لماذا الحقل ؟ لماذا الفضاء المنتجهي ؟ لماذا جبر سيغما ؟

ربما تفقد الرياضيات التفاعل و الأناقة عندما تتحول الى كتل عددية و مستودعات قانونية، و ربما تفقد الحيوية عندما تتحول الى طرق روتينية ، و ربما تنغلق على متخصصيها عندما تصبح مهارات و إستعدادات ذاتية .

ما هي عوائد مطالعة الجبر المجرد ، الزمرة و الحلقة و الحقل ، كذلك جبر سيغما ، و الفضاء الطوبولوجي و الفضاء المتجهي ؟ هل مطالعة هذه المواضيع هي عملية حسية و ذوقية كالتلذذ بالشعر الكلاسيكي و الشعر الحديث ؟ كيف يمكن إقناع عشاق القصيدة الطويلة بلذة الشعر الحرّ ؟ ربما تثير هذه المقايسة حفيظة علماء الرياضيات ، على إن الرياضيات التطبيقية و الرياضيات البحتة ليستا كالشعر الكلاسيكي و الحديث . بنظري لكلاهما نوع من التحرر و التجريد ، و من أعتادت أذناه على سماع الأبيات المقفية و الموسيقية هو كالذي أعتادت عيناه على المعادلات الجبرية و القضايا الهندسية .

مجال إستعمال نظرية الزمر و الحلقة و الحقول و الفضاء المتجهي في مواضيع و نظريات جداً متقدمة في الفيزياء و الكيمياء ، كفيزياء الكمّ ، و في البُنى الكريستالية للمواد و في نظرية الأوتار الفائقة . مواضيع هي ذاتها في تعقيد و غموض ، يصعب لمس نتائجها العملية ، لذلك يصعب التعامل الحسي مع مواضيع الجبر المجرد .

يمكن إحتساب الجبر المجرد على أنه نوع من الرياضيات أو ماوراء الرياضيات . لقد بدأنا بدراسة الرياضيات من خارج الرياضيات ، أي إستعملنا الأعداد و الأشكال في الطبيعة ثم مارسناها في الرياضيات ، بينما الجبر المجرد هو مطالعة الرياضيات من داخل الرياضيات نفسها ، و ذلك من خلال البُنى الجبرية التي نقوم نحن بتعريفها ، من ثم تعميمها . نحن أمام نوعين من الرياضيات ، عُرفت و تعرفت .

عندما تصبح هذه الخاصية $ab = ba$ أحد خصائص الزمر ، أي يمكن تغير مكان العناصر في الضرب ، ربما توحي النظرة التطبيقية و الكلاسيكية للضرب ، نوع من السخافة في هذا التعريف ، لكن عندما نتجاوز المجموعات العددية و نتعامل مع مجموعات من المصفوفات يتجلى مفهوم و أهمية هذا التعريف . على سبيل المثال :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحقول و الحلقات هي تعميم مفاهيم الزمر ، وجود عضو محايد واحد لا أكثر ، كذلك لكل عضو معكوس واحد لا أكثر في كل زمرة هو دليل على نوع من الإستقلالية في البُنى الجبرية المجردة . يمكن إختزال هذه العمومية في المفاهيم الفلسفية و العرفانية من خلال أحادية العنصر المحايد و العنصر المعكوس .

تفتقر مفاهيم الجبر المجرد للبحث الفلسفي ، و ترتيبها المنطقي البسيط و الذي تطغي عليه البدآهة و ربما السذاجة ، جعلت النظرة البدائية لمواضيعه نظرة تحيطها السخافة و الإستهزاء ! عندما تعطى مجموعة مع عملية حسابية للطالب ، و يطلب منه أن يبرهن

على إنها زمرة ، ما هي نتائج هذا البرهان ؟ هنا يظهر دور المعلم . بنظري يلعب المعلم دوره في القضايا الرياضية التطبيقية قبل البرهان ، لكن في الرياضيات البحتة و الجبر المجرد على الخصوص بعد البرهان . و هذه هي القيمة الفلسفية للجبر المجرد .

من الصعب إعطاء تعريف عام للتجريد (Abstract) ، هل هو نزع المفهوم و الإكتفاء بالصورة الظاهرية ، هل هو الإبتعاد عن الواقعية و التشكيك بالمثاليه و اليقينية ، هل هو نزعة شخصية و رغبة فردية ، هل هو نوع من العبثية ، هل هو نوع من العجز أمام بعض الجزم ، هل هو نوع من الملل و النفرة ، هل هو غطاء لإختفاء مواهب و قوى ذاتية، هل هو لغة ما وراء الأفكار ، هل هو تجلّي الذات باللا ذوات ، هل هو ظهور الجوهر بالجواهر ، هل هو ظهور الضمير بالمنظور ، هل هو إطلاع بالمطالعة ... ؟ بما أن الجبر المجرد هو مطالعة البُنى الجبرية لذلك يمكن تعميم هذه المطالعة المجردة لكل موضوع تصدق فيه هذه المجردات . بالنتيجة تشترك هذه المواضيع في التعاريف و البراهين .

الجبر المجرد هو من إبداع أناقة العقل الفرنسي . تطورت و إنتشرت أكثر مواضيع الرياضيات نتيجة إبداع عقول و خصائص بعض الشعوب . فالهندسة تطورت و إنتشرت نتيجة إبداع العقل اليوناني ، و الجبر تطور و إنتشر نتيجة إبداع العقل الإسلامي و العربي، و التحليل تطور و إنتشر نتيجة إبداع العقل الغربي و الألماني على الخصوص . أما التجريد فهو إبداع العقل و اللا أبالية الإيطالية و الجبر المجرد هو إبداع العقل و الأناقة الفرنسية . تتعارض مفاهيم اللا أبالية مع الحتمية الرياضية . لن تستطيع العقلية الإيطالية التي تحيطها اللا أبالية تقنين مفاهيم اللا أبالية رياضياً . يقابل العقل اللا أبالي ، العقل المتأني و المحتاط و هو العقل الذي يدخل التفاصيل و الحواشي و يطغي التعقيد و الإطالة

على إبداعاته الرياضية كالعقل الروسي . يمكن أن تخرج كل مواضيع التجريد من إيطاليا، لكن مواضيع الرياضيات المجردة إن لم تكن من المستحيل فمن الصعب ! لذلك قننت أناقة العقل الفرنسي التجريد الرياضي في نظرية الزمر التي إبتدعها عالم الرياضيات الفرنسي و الشاب إيفارست غالو (Evariste Galois) و قام جندي الرياضيات المجهول نيكولاس بورباكي (Nicolas Bourbaki) و هو كذلك فرنسي الصنع بنشر و تعميم و توسيع هذه النظرية و مفاهيمها المجردة .

تعتبر الزمر ، و الحلقات و الحقول من أهمّ مواضيع الجبر المجرد ، و ما تجدونه في هذه الدراسة هو خلاصة لأهم مفاهيم الجبر المجرد و مواضيعه مع أمثله توضيحية و توصيفية لهذه المواضيع . هذه الدراسة هي ليست درس في الجبر المجرد و إنما درس في التجريد ، لذلك لم أستطرق لكل مواضيع الجبر المجرد و مسائله المختلفة ، و كان هدفي هو تفهيم و توضيح مفاهيم التجريد في الرياضيات . في آخر البحث ذكرت بعض الفضاءات الرياضية و تعريفها و مفاهيمها المستخلصة من النظرة التجريدة للجبر . وجود المعادل الإنجليزي للمفاهيم هو للتحقق من المعادل العربي لها ، و كذلك تسهيل عملية البحث لمن يرغب بالمزيد من المعلومات عن هذه المواضيع و الأصطلاحات .

العملية الثنائية Binary Operation

العملية الثنائية من الأعمال المهمة في الجبر المجرد و تعتبر من البُنى الأساسية ، و أبسط تعريف للعملية الثنائية : هي عبارة عن عمل كتركيب شيئين و الحصول على شئ ثالث . العملية الثنائية و البُنى الجبرية من أهم مفاهيم الجبر المجرد .

العملية الثنائية يمكن أن تكون أي عمل حسابي ، كالجمع أو الطرح أو الإتحاد أو التقاطع أو أي عمل آخر نقوم نحن بتعريفه ، نرمز لهذا العمل بال (*) النجمة مثلاً أو ⊕ أو ⊗. أو أي علامة أخرى .

تجميعي Associative

نقول عن عملية ثنائية تجميعية إذا كانت لها خاصية إهمال الأقواس :

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

القانون التجميعي للجمع $(a+b)+c=a+(b+c)$

القانون التجميعي للضرب $(a.b).c=a.(b.c)$

تبديلي Commutative

هي العملية الثنائية التي تعطي نفس النتيجة بغض النظر عن ترتيب الأعضاء :

$$a*b=b*a$$

مثلاً عملية الجمع تبديلية لكن عملية الطرح غير تبديلية أي $a+b=b+a$ و $a-b\neq b-a$

متطابقة جمعية Additive Identity

هو العنصر المتطابق (أو المحايد) في عملية الجمع أي الصفر .

توزيعي Distributive

هو قانون التوزيع من أجل الضرب الحسابي فوق الجمع أي :

$$a.(b+c)=ab+ac$$

محايد Identity

العنصر المحايد ، هو عضو في مجموعة مزودة بعملية ثنائية ، بحيث إن نتيجة تطبيق هذه العملية على ذلك العنصر و أي عضو آخر في المجموعة تكون العضو الأخير . العضو المحايد في الضرب الواحد . و العضو المحايد في الجمع الصفر .

نرمز للعضو المحايد e إذن :

$$a*e=e*a=a$$

معكوس Inverse

لكل عضو في مجموعة مزودة بعملية ثنائية ، عضو آخر واحد لا أكثر ، بحيث نتيجة تطبيق العملية الثنائية بين هذين العضوين ، هو العنصر المحايد . أي :

$$a*a'=a'*a=e$$

في الجمع $a'=-a$ هو معكوس a

في الضرب $a'=a^{-1}$ هو معكوس a شرط أن تكون مخالفة للصفر .؟

الزمرة Group

هذا البناء الجبري $(G,*)$ عبارة عن مجموعة G و عملية ثنائية مثل *

البُنية الجبري $(G,*)$ زمرة إذا توفرت فيها هذه الخصائص :

وجود خاصية التجميع بين الأعضاء

- $\forall a,b,c \in G \Rightarrow a*(b*c)=(a*b)*c$

وجود عنصر مثل e ليس له أي أثر على سائر الأعضاء يعرف بأسم العنصر المحايد .

- $\forall a \in G, \exists e \in G \Rightarrow a*e=e*a=a$

وجود معكوس ، أو نظير ، أو مضاد أي عنصر

- $\forall a \in G, \exists a' \in G \Rightarrow a*a'=a'*a=e$

مثال : عمل الجمع على مجموعة الأعداد الحقيقية (R) عبارة عن زمرة . كذلك عمل الطرح و الضرب ، أي $(R,+)$ و $(R,-)$ و $(R,\times)$ عبارة عن زمر .

مثال : عمل الجمع على مجموعة الأعداد الطبيعية (N) ليس زمرة أي $(N,+)$ ليس زمرة ، لا تملك خاصية العنصر المحايد في الجمع .

مثال : المجموعة $G=\{a,b,c,d\}$ و العملية الثنائية * بهذا التعريف كما في الجدول:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

خصائص العملية الثنائية * حسب هذا الجدول

أولاً:

$$\forall a,b,c,d \in G \Rightarrow a*(b*c)=a*(d)=d$$

$$\forall a,b,c,d \in G \Rightarrow (a*b)*c=(b)*c=d$$

إذن:

$$a*(b*c)=(a*b)*c$$

يمكن تحقيقها لكل الأعضاء . أول خاصية تحققت

ثانياً: $a*a=a$ و $b*a=b$ و $c*a=c$ و $d*a=d$

إذن : العنصر المحايد a

$$\forall a \in G, \exists e \in G \Rightarrow a*e=e*a=a$$

ثاني خاصية تحققت

ثالثاً: $a*a=a$ و $b*b=a$ و $c*c=a$ و $d*d=a$

إذن : كل عضو هو معكوس نفسه

$$\forall a \in G, \exists a' \in G \Rightarrow a*a'=a'*a=e$$

ثالث خاصية تحققت ، بالنتيجة $(G,*)$ عبارة عن زمرة .

مثال : المجموعة $G=\{1,-1,i,-i\}$ مع العملية الثنائية الضرب تشكل زمرة $(G,\times)$، لأن :

للتذكير $\sqrt{-1}=i$

- $1\times(-1\times i)=(1\times -1)\times i$
- الواحد عنصر محايد
- $\begin{cases} 1\times 1=1 \\ -1\times(-1)=1 \\ i\times(-i)=1 \\ -i\times i=1 \end{cases}$

مثال : برّهن على إن $(G,*)$ زمرة ، إذا كانت فيها مجموعة G هي مجموعة الإعداد المنطقة Q عدى الصفر ، و العملية الثنائية هي :

$$\forall a,b\in G\Rightarrow a*b=\frac{ab}{2}$$

خاصية التوزيع

$$\left.\begin{array}{l} a*(b*c)=a*(\frac{bc}{2})=\frac{abc}{2} \\ (a*b)*c=(\frac{ab}{2})*c=\frac{abc}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow a*(b*c)=(a*b)*c$$

العنصر المحايد

$$a*e=a\Rightarrow a*(2)=a\Rightarrow e=2$$

العنصر المعكوس

$$a*a'=e\Rightarrow a'=\frac{a}{4}$$

مثال : إثبت $(ab)^2 = a^2b^2$

نفرض $(G,\times)$ و a و b أعضاء في G

بما أن $(G,\times)$ زمرة لذلك $ab = ba$. كذلك يوجد a^{-1} و b^{-1} في G

$$(ba)(bb^{-1}) = (ab)(bb^{-1})$$
$$b(ab)b^{-1} = (ab^2)b^{-1} \Rightarrow b(ab) = ab^2$$
$$b(ab) = ab^2 \Rightarrow (eb)(ab) = (ea)b^2$$
$$(a^{-1}(ab))(ab) = (a^{-1}a^2)b^2$$
$$a^{-1}(ab)^2 = a^{-1}(a^2b^2) \Rightarrow (ab)^2 = a^2b^2$$

مثال : x عضو من المجموعة الحقيقية بحيث $x > 1$ إذن $G = \{\forall x \in R | x > 1\}$

العملية الثنائية $x * y = xy - x - y + 2$ برّهن على إن $(G,*)$ زمرة .

$$\forall x, y \in G \Rightarrow x > 1, y > 1 \Rightarrow y - 1 > 0$$
$$x(y-1) > (y-1) \Rightarrow xy - x - y + 2 > 1$$

أولاً : خاصية التوزيع قابلة للتحقيق

$$\forall x, y, z \in G \Rightarrow x*(y*z) = (x*y)*z$$

ثانياً : العنصر المحايد

$$2*y = 2y - 2 - y + 2 = y \Rightarrow e = 2$$

ثالثاً : العنصر المعكوس

$$a'*y = e \Rightarrow a'y - a' - y + 2 = 2 \Rightarrow a' = \frac{a}{a-1} > 1$$

مثال : أفرض G مجموعة مع عملية ثنائية تجميعية * . أولاً برهن إن لكل عضو في G على الأقل عضو معكوس واحد . ثانياً إذا كان a و b في G و لكل منهما معكوس ، كذلك يوجد معكوس $a*b$

أولاً :

نفرض x في G و له معكوسين y و z إذن :

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z$$

و هذا يعني إن هذين المعكوسين متساويين . و لكل عضو معكوس واحد .

ثانياً :

$$(a*b)(b^{-1}*a^{-1}) = a*(b*b^{-1})*a^{-1} = a*e*a^{-1} = a*a^{-1} = e$$

كذلك

$$(b^{-1}*a^{-1})*(a*b) = e$$

و هذا يعني إن $b^{-1}*a^{-1}$ هو معكوس $a*b$

تعتبر الزمرة $(G,*)$ زمرة تبديلية commutative group إذا كانت خاصيت التبديل في هذه الزمرة أي $a*b = b*a$ كذلك تسمى زمرة أبيلية Abelian group

نصف زمرة semi-group المجموعة G مع عملية ثنائية تجميعية Associative أي $G \times G \to G$ بحيث $(a.b).c = a.(b.c)$

الحلقه Ring

الحلقة عبارة عن بُنية جبرية تحتوي على مجموعة غير فارغة R مع عمليتين ثنائيتين و عادة ماتكون هذه العمليتين هما الجمع و الضرب .

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

$$a+b=b+a$$

$$\forall a\in R,\exists e\in R,a+e=a$$

$$\forall a\in R,\exists -a\in R\Rightarrow a+(-a)=e$$

$$(a.b).c=a.(b.c)$$

$$a(b+c)=a.b+a.c$$

$$(b+c)a=b.a+c.a$$

الحلقة هي مجموعة غير فارغة R مزودة بعمليتين ثنائيتين ، هما الجمع و الضرب $(R,+,\times)$ بحيث :

- المجموعة تكون زمرة أبيلية تحت الجمع ، أي الزمرة $(R,+)$ هي زمرة تبديليه .
- المجموعة تكون نصف زمرة تحت الضرب ، أي الزمرة $(R,\times)$ هي نصف زمرة .
- كذلك $\forall a,b,c\in R\Rightarrow a.(b+c)=a.b+a.c$

أو

$$\forall a,b,c\in R\Rightarrow (b+c).a=b.a+c.a$$

مثال : مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية (السالبة و الموجبة و الصفر) تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حلقة .

مثال : مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حلقة .

مثال : مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حلقة .

مثال : العدد الطبيعي n ، مجموعة المصفوفات المربعية $n \times n$ على الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تحت عمليتين جمع و ضرب المصفوفات تشكل حلقة .

الحلقة التبديلية **Communicative ring**

إذا كانت الحلقة بالنسبة لعملية الضرب تبديلية ، فهي حلقة تبديلية أي

$$ab = ba$$

مثال : مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية (السالبة و الموجبة و الصفر) تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حلقة أبيلية .

مثال : مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حلقة أبيلية .

مثال : مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حلقة أبيلية .

الحلقة الكاملة Integral domain

هي الحلقة التبديلة $(R,+,\times)$ مع هذه الخاصيتين :

- وجود عنصر محايد للضرب في المجموعة R . الواحد عنصر محايد للضرب أي:

$$1a = a1 = a$$

- إذا كان الصفر هو العنصر المحايد للجمع ، حاصل ضرب كل عنصرين من R مثل a و b إذا كان صفر أي $ab = 0$ فهذا يعني a أو b يجب أن تساوي صفر .

مثال : مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حلقة كاملة .

مثال : مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حلقة كاملة .

الحقل Field

نلقي نظرة على بُنية جبرية مجردة ، يمكن تعريف العمليات الأربعة فيها (ما عدى التقسيم على الصفر) ، لتكن العمليات هي الجمع و الضرب مع هذه الخصائص :

$$\forall a,b \Rightarrow a+b=b+a$$
$$\forall a,b,c \Rightarrow (a+b)+c=a+(b+c)$$
$$\forall a,\exists o \Rightarrow a+o=a$$
$$\forall a,\exists -a \Rightarrow a+(-a)=o$$
$$\forall a,b \Rightarrow a.b=b.a$$
$$\forall a,b,c \Rightarrow (a.b).c=a.(b.c)$$
$$\forall a,b,c \Rightarrow a.(b+c)=a.b+a.c$$
$$\forall a,\exists 1 \Rightarrow 1.a=a$$
$$\forall a,\exists a^{-1} \Rightarrow a.(a^{-1})=1$$

الحقل عبارة عن بُنية جبرية مجردة مع عمليتين ثنائيتين عادة ما تكون هذه العمليتين هي الجمع و الضرب $(F,+,.)$ ، بحيث تكون $(F,+)$ زمرة تبديليه ، و $(F,.)$ كذلك زمرة تبديلية بعد إقصاء عنصر الصفر .

مجموعة الأعداد المنطقة Q ، و مجمةعة الأعداد الحقيقية R و مجموعة الأعداد المركبة C كلها حقول . ***جميع الحقول حلقات لكن ليس العكس صحيح*** .

كما تلاحظون كل حقل هو مجموعة غير خالية مع عمليتين ثنائيتين مختلفتين ، نتائج هذه الأعمال يمكن أن تكون مشابهة أو مغايرة ، على سبيل المثال جمع و ضرب عددين النتيجة عدد ، لكن نتيجة جمع طولين (خطين) هو خط بينما ضرب طولين هو سطح .

مثال : مجموعة الأعداد المُنطقة $\mathbb{Q}$ تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حقل .

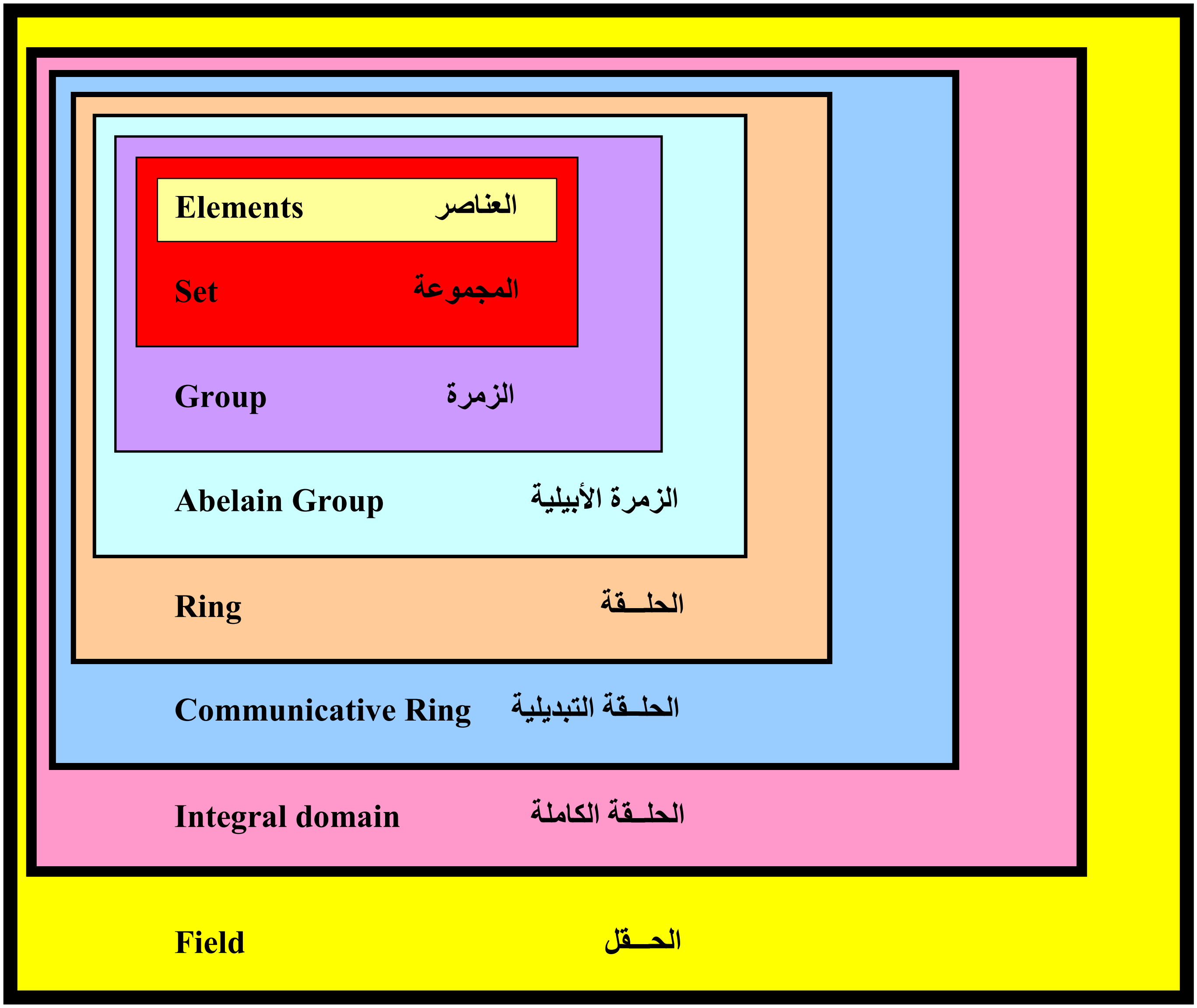
مثال : مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب تشكل حقل .

مثال : مجموعة الأعداد المركبة (العُقدية) $\mathbb{C}$ تحت العمليتين الحسابيتين المركبتين الجمع و الضرب تشكل حقل .

مثال : مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية (السالبة و الموجبة و الصفر) تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب **لا تشكل** حقل .

مثال : مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تحت العمليتين الحسابيتين الجمع و الضرب **لا تشكل** حقل .

الزمــرة ، الحــلقة و الحــقل



الشكل المربعي الأكبر يضمّ الشكل المربعي الأصغر أي :

- كل مجموعة تضم عناصر
- كل زمرة تضم مجموعة
- كل زمرة أبيلية هي زمرة ، لكن لا كل زمرة هي زمرة أبيلية .
- كل حلقة هي زمرة ، لكن لا كل زمرة هي حلقة .
- كل حقل هو حلقة ، لكن لا كل حلقة هي حقل .

جبر سيغما Sigma Algebra

هو عبارة عن تجميع من مجموعات جزئيه لمجموعه تحتوي على المجموعات نفسها، و المجموعه الفارغه ، و متممات في المجموعه لكل أعضاء التجميع ، و كل أتحادات عدودة للأعضاء .

بتعبير آخر F جبر سيغما إذا:

1) $\phi \in F$

2) if $A \in F$, then $A^c \in F$

3) if $A_n \in F$ and all $n \in N$, then $\bigcup_{n \in N} A_n \in F$

و هذا يعني :

1) F تحتوي على المجموعه الفارغه

2) F تحتوي على المجموعه و متممها

3) F تحتوي على أتحاد جميع الأعضاء

بعض أنواع الفضاءات

الفضاء الإقليدي Euclidean Space

الفضاء الإحداثي الحقيقي : نفرض R حقل الأعداد الحقيقية ، لكل عدد صحيح موجب n ، الفضاء النوني الأعداد الحقيقية ، n بُعدي هو فضاء متجهي على R و يرمز له R^n و كل عنصر منه يكتب بصورة :

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

الجداء الداخلي لهذه المتجهتين x و y هو :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

طول المتجهة x يساوي :

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

المتري في R^n يساوي :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

الفضاء الإقليدي هو هو عبارة عن فضاء إحداثي حقيقي

الفضاء المتري Metric Space

الفضاء المتري هو عبارة عن زوج مرتب (M,d) بحيث M مجموعة و d متري في M (تعرف الدالة d بدالة الفاصلة)

يخضع كل فضاء متري لهذه الشرائط أو الخصائص:

$$d : M \times M \to R$$

$$x, y \in M \Rightarrow \begin{cases} d(x,y) \geq 0 \\ d(x,y) = d(y,x) \\ d(x,y) = 0, if\ , x = y \end{cases}$$

$$x, y, z \in M \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

الفضاء المتجهي Vector Space

الفضاء المتجهي عبارة عن حقل سلّمي F مع مجموعة V من المتجهات مع هذه الخصائص :

نفرض u و v و w متجهات و a و b سلّميات

$$u+(v+w)=(u+v)+w$$

$$v+w=w+v$$

$$v+0=v$$

$$a(v+w)=av+aw$$

$$(a+b)v=av+bv$$

$$a(bv)=(ab)v$$

$$1v=v$$

الفضاء الطوبولوجي Topological Space

الفضاء الطوبولوجي عبارة عن المجموعة X مع المجموعة T ، بحيث T عبارة عن كل المجموعات الجزئية من X ، مع هذه الخصائص :

1. المجموعة X و المجموعة الخالية هنّ مجموعات في T
2. كل إتحاد مجموعات من T هي مجموعة في T
3. كل تقاطع مجموعات من T هي مجموعة في T

فضاء هيلبرت Hilbert Space

هو فضاء مع جداء داخلي بحيث جميع متسلسلات كوشي في هذا الفضاء هي متقاربة

فضاء هيلبرت هو فضاء متجهي H مع جداء داخلي حقيقي أو عُقدي $\langle f, g \rangle$ ، يُعرّف فيه الطول هكذا :

$$|f| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

كل فضاء هيلبرت هو فضاء باناخ و ليس العكس صحيح

جمع مباشر فضائين هيلبرت H_1 و H_2 هو فضاء هيلبرت و يكتب

$$H_1 \oplus H_2$$

مثال لفضاء هيلبرت لا متناهي الأبعاد L^2 ، مجموعة كل الدوال $f : R \to R$ بحيث تكامل f لكل المحاور أو الخطوط الحقيقية متناه ، الجداء الداخلي هو :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx$$

فضاء تآلفي Affine Space

نفرض V فضاء متجهي على الحقل K . و G مجموعة غير خالية .

الشرائط :

1. $s \in G$ بحيث $s + 0 = s$
2. $A, B \in V, s \in G$ بحيث $(s + A) + B = s + (A + B)$
3. $\forall t \in G, \exists A \in V$ بحيث $t = s + A$

فضاء نظيمي Normed Space

هو فضاء متجهي مزوّد بنظيم

فضاء باناخ Banach Space

هو فضاء نظيمي تام

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com