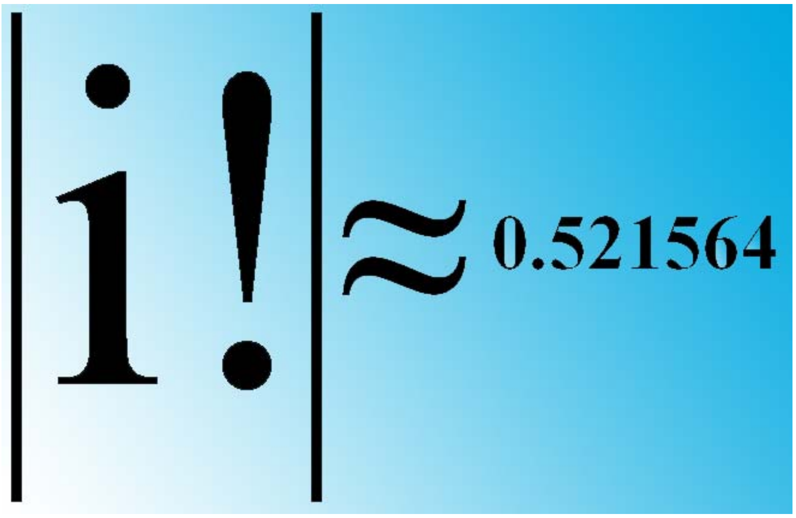
بسم الله الرحمن الرحيم



ميتافيزيقية الرياضيات

تظهر الكثير من الروابط العددية بين مجموعة من الأعداد الطبيعة على شكل نظم و صياغة خاصة تجلب الإنتباه فنتوقف عندها بإندهاش و تعجب و يطلق عليها البعض تسمية سحر الأعداد لأن ما يثيره النظم و النسق بين هذه الأعداد أشبه بالسحر شئ يظهر من اللا شئ ! في هذا المقال أنا لست بصدد الروابط الحسابية البسيطة بين الأعداد الطبيعة و سرد مجموعة من الأعداد تحكمها هندسة و ترتيب خاص يجلب الإنتباه و إنما أنا وراء روابط تثير الشكوك في ماهية الرياضيات . الروابط الحسابية كهذه مثلاً :

$\sqrt{6724} = 6 + 72 + 4$

$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}$

$95 \div 5 = 9 + 5 + 5$

$1 \times 1 = 1$

$11 \times 11 = 121$

$111 \times 111 = 12321$

$1111 \times 11111 = 1234321$

$11111 \times 11111 = 123454321$

لا تزعزع المفاهيم الرياضية بالعكس هي تساعد على تنميتها و ترسيخها ، لكن وجود بعض الروابط الرياضية تزلزل بعض المفاهيم و حتى تثير الشكوك في ماهية الرياضيات نفسها كهذه الروابط مثلاً :

$$e^{\pi i} = -1$$
$$e^{2\pi i} = 1$$

إستنتاج أعداد صحيحة من أعداد خيالية ، إستنتاج العدد واحد و هو العدد الذي مفهومه يفوق كل المفاهيم من موضوع رياضي لا مفهوم له هو $\sqrt{-1}$. سحر هذه الروابط يفوق سحر الروابط الحسابية في نظرية الأعداد و ذلك لإختباء بعض المفاهيم في هذه الروابط . حتى و إن كانت الرابطة الرياضية الحاكمة على هذه الروابط هي حقيقية خيالية ، مركبة :

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$$

لكن مفهوم نتائجها يثير الإنتباه .

الصورة في أول المقال غريبة بعض الشئ ، الخطان الموازيان هما القيمة المطلقة للمقدار الذي في داخلهما و الحرف (i) هو العدد الخيالى و العلامة (!) هي مضروب العدد . صعوبة و غرآبة إستنتاج هذه الرابطة كما ستلاحظون هو بقدر غرآبة الصورة .

كيف يمكن للرياضيات أن تضع تعريف ثم يأخذ هذا التعريف مفهوم تبنى عليه نظريات ثم تتخطى التعريف و مفهومه بتعاريف و مفاهيم أخرى ؟ هذا ما سنلاحظه في الصفحات القادمة و كيف أخذت الرياضيات تنقلب أو تحتال أو تتخطى مفهوم مضروب الأعداد الذي بدأت به من الأعداد الطبيعية و أوصلته الى الأعداد الصحيحة و الغير مُنطقة و الخيالية . قدرة الرياضيات المطلقة و الرائدة بلا منازع جعلتها تفرض و تبسط جميع مفاهيمها الحقيقية و الخيالية ، و هذا ما عجزت عنه الفلسفة في بسط مفاهيمها الميتافيزيقية .

تكامل غاوس

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

البرهان :

نستعين بالتغير المتغير هذا $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy)$$

$$(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy) = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)^2 \qquad \mathrm{I}$$

بما أن مساحة جزء السطح في الإحداثيات القطبية $dA = rdrd\theta$ إذن :

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr = \pi \qquad \mathrm{II}$$

من تساوي النتيجتين النهائيتين I و II نحصل على :

$$(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)^2 = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$

تكامل غاما

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

نفرض $n = 0$ إذن :

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1$$

في حالة $n \geq 1$ نستعين بالتكامل الجزئي مع هذه المتغيرات :

$$u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1} dx$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

إذن :

$$I_n = \int_0^\infty u dv \Rightarrow I_n = uv \Big|_0^\infty - \int_0^\infty v du$$

$$I_n = [-x^n e^{-x}]\Big|_0^\infty + \int_0^\infty nx^{n-1} e^{-x} du$$

$$I_n = 0 + nI_{n-1}$$

هذه الربطة التكرارية الأخيرة تساوي $n!$ إذن :

$$\boxed{\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!}$$

نستنتج من تكامل غاما أو دالة غاما $\Gamma(n)$ هذه النتائج :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \times 1 = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \times 2! = 3!$$

الغرض من طرح تكامل غاوس و غاما هو لتبين و توضيح حقيقة رياضية غريبة سنتعرف عليها الآن و هي الفاكتوريل (factorial) أو العاملي أو المضروب للأعداد السالبة و كذلك للأعداد الكسرية و الأعداد الخيالية .

نعلم من تعريف المضروب هو للأعداد الطبيعية و ناتجه كذلك عدد طبيعي ، عدى الصفر أتفقوا على أن مضروب الصفر يساوي و احد و هذا التعريف ينطبق و يتوائم مع جميع الدوال التي يظهر فيها مضروب الصفر . المضروب للأعداد الطبعية كالآتي:

$$
\begin{aligned}
&0! = 1 \\
&1! = 1 \\
&2! = 1 \times 2 = 2 \\
&3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \\
&4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \\
&5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times n
\end{aligned}
$$

إذا و ضعنا في دالة أو تكامل غاما $n = -\frac{1}{2}$ ماذا ستكون النتيجة ؟

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n! \Longrightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = (-\frac{1}{2})!$$

نحسب التكامل $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx$ و لحسابه نفرض $x = u^2$

$$x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$$

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2}\, 2u\,du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du$$

هذا التكامل هو تكامل غاوس و يساوي $\sqrt{\pi}$

إذن :

$$\Gamma(n+1)=n!\Rightarrow\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(-\frac{1}{2}+1)=(-\frac{1}{2})!=\sqrt{\pi}$$

أي :

$$(-\frac{1}{2})!=\sqrt{\pi}$$

هذه هي أحد النتائج العجيبة في الرياضيات ، و هذه بعض النتائج الأخرى :

$$(\frac{1}{2})!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(n+\frac{1}{2})!=\sqrt{\pi}\times\prod_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}$$

هذا العامل $\prod_{k=0}^{n}$ هو عامل الضرب ، مثال:

$$n=5\Rightarrow 5.5!=\sqrt{\pi}\times\prod_{k=0}^{5}\frac{2k+1}{2}=\sqrt{\pi}\times(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{11}{2})=1535.388\cdots$$

من هذا التكامل $\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n!$ يمكن تعين مضروب أي عدد على سبيل المثال العدد الخيالي $i=\sqrt{-1}$

$$\Gamma(i+1)=\int_0^\infty x^i e^{-x}dx=i!$$

من برنامج (wolframalpha) :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^i dx=\Gamma(i+1)=i!\approx 0.498016-0.154950i$$

$$|i!|\approx 0.521564$$

جلال الحاج عبد

2009 - 10 – 14

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com