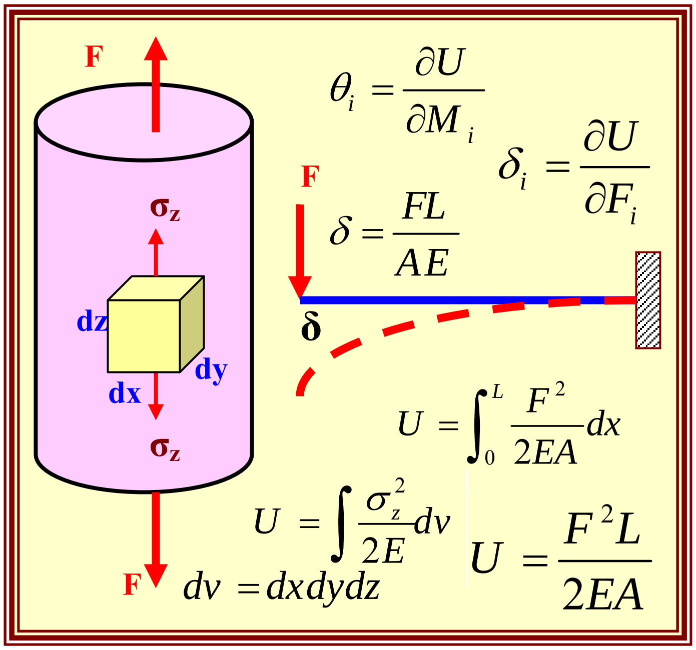
بســـم الله الرحـــمن الرحـــيم



نظرية كاستليانو

توجد عدة نظريات يتم من خلالها تعين الإنحراف في الهياكل المرّنة ذات السلوك الخطي، من هذه النظريات نذكر بالإسم :

- Menabrea’s theorem
- Betti’s theorem
- Maxwell’s theorem
- Clapeyron’s theorem
- Castigliano’s theorem

بنظري من بين جميع النظريات التحليلية لإنحراف الهياكل و الأنظمة المرّنة و الخطية تعتبر نظرية كاستليانو هي الأسهل و الأعمّ لذلك نالت إهتمام المهندسين و أخذت مكانة في علم الميكانيكيا . ترجع هذه النظرية الى المهندس الإيطالي Alberto Cstigliano عام 1879 .

تستعمل نظرية أو طريقة كاستليانو للهياكل المرّنة ، و المّرنة الخطية ، لتعين و محاسبة الإنحراف في نقطة إعمال القوة أو العزم على ذلك الهيكل (structure) ، يمكن أن يكون هذا الهيكل عارضة (beam) أو إطار (frame) أو جملون (truss) أو هيكل آخر . يصبح من الصعب تعين الإنحراف في بعض الهياكل و ذلك لنوع القوى و العزم المؤثر على ذلك الهيكل و أحياناً تنتهي الطرق التحليلية الأخرى بمجموعات من القوى المعقدة و هي كذلك تنتهي بمعادلات تفاضلية عادية و جزئية يصعب حلها ، لذلك نلجأ لطريقة كاستليانو لحلّ هذا النوع من المسائل بسهولة ، هي طريقة يمكن تعميمها لأنواع الهياكل ، كالعارضات الحديدية المقوسة مثلاً .

تعتمد طريقة كاستليانو على طاقة الإنفعال (Strain Energy) الناتجة في الهيكل نتيجة القوة و الإزاحة (displacement) . من خلال هذه الطاقة و مبرهنة كاستليانو الثانية نصل للإنحراف الذي ينتج من هذه الطاقة .

طاقة الإنفعال

يؤدي أي عمل خارجي على هيكل مرّن الى تشوه و إنحراف أعضاء ذلك الهيكل . ينتج عن هذا التشوه طاقة كامنة أو طاقة الإنفعال و تساوي متوسط القوة المؤثرة على ذلك الهيكل في الإنحراف الذي يتعرض له ذلك الهيكل في موضع تلك القوة أي :

$$U = \frac{F}{2} y$$

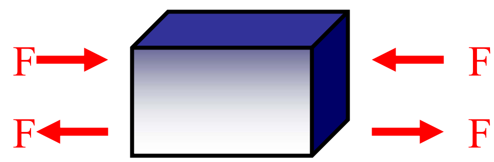
U طاقة الإنفعال

F القوة

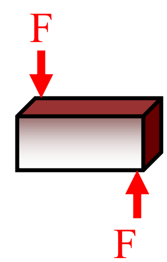
y الإنحراف (deflection)

يمكن إستبدال القوة F (force) بعزم الثني (bending moment) M أو عزم الدوران T (torsion moment) مع الحفاظ على وحدة طاقة الإنفعال ، نيوتن متر مثلاً .

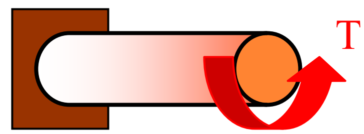
$U = \frac{F^2 L}{2AE}$ في الضغط أو الشدّ , compress / tension



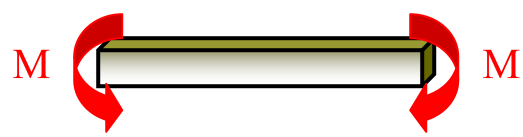
$U = \frac{F^2 L}{2AG}$ في القصّ , shear



$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$ في الإلتواء , torsion



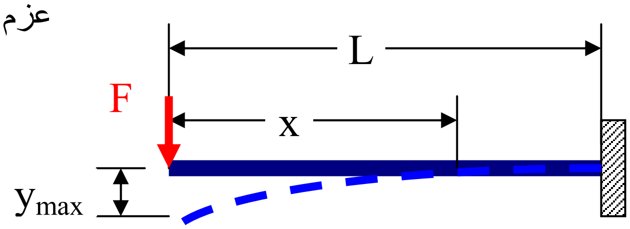
$U = \frac{M^2 L}{2EI}$ في الثني , bending



F قوة ، T عزم الإلتواء ، M عزم الثني ، A مساحة المقطع ، L الطول ، E معامل المرونة أو معامل يونغ ، G معامل الصلابة ، I عزم العطالة للسطح ، J العزم القطبي للسطح .

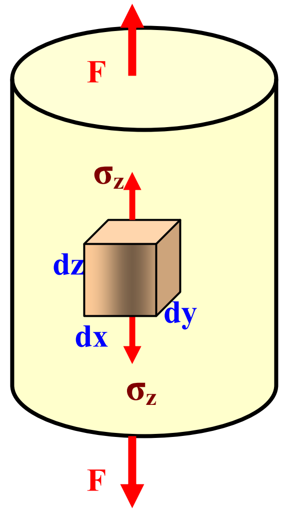
مثال : طاقة الإنفعال لعارضة ذات دعامة ثابتة (عارضة ناتئة cantilever beam)

$M = -Fx$ عزم الثني في أي نقطة يساوي



$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow U = \int_0^L \frac{F^2 x^2 dx}{2EI} \Rightarrow U = \frac{F^2 L^3}{6EI}$$

مثال : طاقة الإنفعال الناتجة عن قوة محورية على جزء جداً صغير من جسم تحت الشدّ (أو الضغط) :



$$U = \int du \Rightarrow U = \int_V (\frac{1}{2}\sigma_z dxdy)(\varepsilon_z dz)$$

$$U = \int_V \frac{1}{2}\sigma_z (dxdydz)(\frac{\sigma_z}{E})$$

$$U = \int_V \frac{\sigma_z^2}{2E} dv$$

إذا فرضنا الحجم و المساحة و الطول و القوة مقادير ثابتة في هذه الحالة :

$$U = \int_V \frac{\sigma_z^2}{2E} dv \Rightarrow U = \frac{\sigma_z^2 V}{2E}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{F^2}{A^2} \quad ، \quad V = AL \quad \Rightarrow U = \frac{\sigma_z^2 V}{2E} \Rightarrow U = \frac{\frac{F^2}{A^2} AL}{2E} \Rightarrow U = \frac{F^2 L}{2AE}$$

أما إذا كانت هذه المقادير غير ثابتة يجب حساب تكامل التابع . نكتب لجميع الحالات :

طاقة الإنفعال لقيم متغيرة	طاقة الإنفعال لقيم ثابتة	نوع القوة أو العزم
$U = \int_0^L \frac{F^2}{2EA} dx$	$U = \frac{F^2 L}{2AE}$	القوى المحورية
$U = \int_0^L \frac{F^2}{2AG} dx$	$U = \frac{F^2 L}{2AG}$	قوة القصّ
$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$	$U = \frac{M^2 L}{2EA}$	عزم الثني
$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$	$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$	عزم الإلتواء

كل من F و M و T توابع من x

مبرهنة كاستليانو : تأثير القوى على نظام مرّن يؤدي الى إزاحة صغيرة في جهة إعمال القوة و هذه الإزاحة تساوي إشتقاق جزئي لطاقة الإنفعال بالنسبة لتلك القوة :

الإنحراف المحوري axial deflection

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

δ_i مقدار إزاحة نقطة على عضو نتيجة القوة F_i في تلك النقطة و في جهة القوة F_i . في الدوران الإزاحة نتيجة العزم عبارة عن زاوية جداً صغيرة θ_i حسب الراديان و في جهة إعمال العزم M_i في تلك النقطة .

الإنحراف الإلتوائي torsion deflection

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}$$

في مثال الصفحة الثالثة مقدار الإنحراف للعارضة في إنتهائها طبق نظرية كاستليانو :

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} \Rightarrow y = \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{F^2 L^3}{6EI}\right) \Rightarrow y_{\max} = \frac{FL^3}{3EI}$$

يمكن إستعمال طريقة كاستليانو بهذه الصورة :

$$U = \int \frac{F^2 dx}{2AE}$$

القوى المحورية

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \Rightarrow \delta_i = \frac{\partial}{\partial F_i}\left(\int \frac{F^2 dx}{2AE}\right) \Rightarrow \delta_i = \int \frac{1}{AE}\left(F \frac{\partial F}{\partial F_i}\right) dx$$

$$U = \int \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

عزم الإلتواء

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \Rightarrow \theta_i = \frac{\partial}{\partial M_i}\left(\int \frac{T^2 dx}{2GJ}\right) \Rightarrow \theta_i = \int \frac{1}{GJ}\left(T \frac{\partial T}{\partial M_i}\right) dx$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

عزم الثني

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \Rightarrow \delta_i = \frac{\partial}{\partial F_i}\left(\int \frac{M^2 dx}{2AE}\right) \Rightarrow \delta_i = \int \frac{1}{EI}\left(M \frac{\partial M}{\partial F_i}\right) dx$$

ترجع هذه الروابط الى نظرية كاستليانو المعدلة .

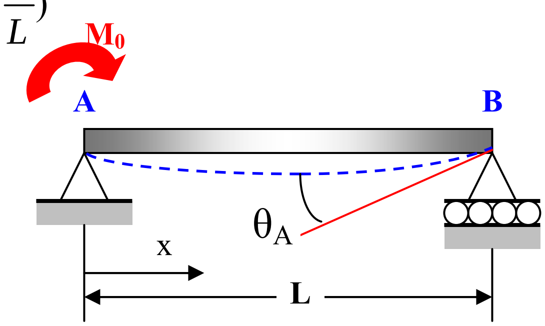
مبرهنة كاستليانو الأولى هي للقوى على الهياكل المرّنة الخطية ، و مبرهنة كاستليانو الثانية هي للإزاحة التي تحدث على الهياكل المرّنة الخطية . تعرف مبرهنة كاستليانو الثانية بمبرهنة الحدّ الأدنى من طاقة الإنفعال للهياكل و الأنظمة المرّنة الخطية .

الهياكل المرّنة الخطية : هي الهياكل و الأنظمة التي يصدق عليها $\sigma = E\varepsilon$ ، تقع الإزاحة و التغيرات على هذه الهياكل و الأنظمة في الناحية المرّنة (elastic) ، و الخطية (linear) من مخطط الإجهاد - الإنفعال . σ الإجهاد ، E معامل يونغ ، ε الإنفعال . فيما يلي حلّ مجموعة من المسائل لأنواع الهياكل من خلال طريقة كاستليانو :

مثال 1 : عارضة بسيطة AB بطول L عزم إزدواج M_o على الدعامة A لهذه العارضة، المطلوب زاوية الإنحراف θ_A للدعامة B

$R_A = \dfrac{M_0}{L}$ القوة على الدعامة A

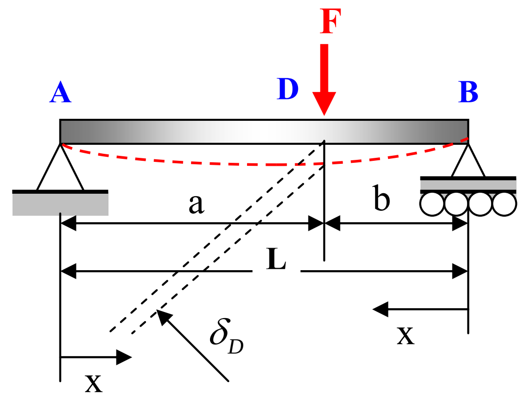
$$M = M_0 - R_A x \Rightarrow M = M_0 - \frac{M_0 x}{L} \Rightarrow M = M_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$



$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow U = \frac{M_0^2}{2EI}\int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)dx \Rightarrow U = \frac{M_0^2 L}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{dU}{dM_0} \Rightarrow \theta_B = \frac{d}{dM_0}\left(\frac{M_0^2 L}{6EI}\right) \Rightarrow \theta_B = \frac{M_0 L}{3EI}$$

المثال 2 : المطلوب إنحراف العارضة AB في محل إعمال القوة F .



$$R_A = \frac{Fb}{L} \quad ، \quad R_B = \frac{Fa}{L}$$

$$M_{AD} = R_A x = \frac{Fbx}{L}$$

$$M_{DB} = R_B x = \frac{Fax}{L}$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$U_{AD} = \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\frac{Fbx}{L}\right)^2 dx \Rightarrow U_{AD} = \frac{F^2 a^3 b^2}{6EIL^2}$$

$$U_{DB} = \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\frac{Fax}{L}\right)^2 dx \Rightarrow U_{DB} = \frac{F^2 a^2 b^3}{6EIL^2}$$

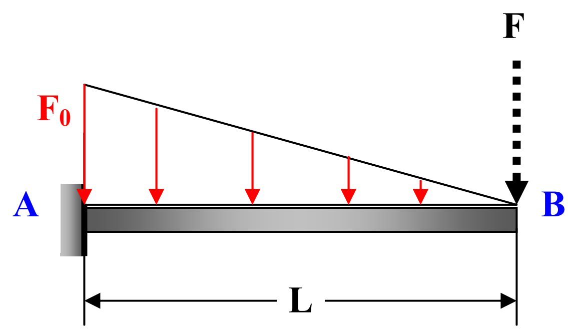
$$U = U_{AD} + U_{DB} \Rightarrow U = \frac{F^2 a^3 b^2}{6EIL^2} + \frac{F^2 a^2 b^3}{6EIL^2}$$

$$U = \frac{F^2 a^2 b^2}{6EIL}$$

$$\delta_D = \frac{dU}{dF} \Rightarrow \delta_D = \frac{d}{dF}\left(\frac{F^2 a^2 b^2}{6EIL}\right) \Rightarrow \boxed{\delta_D = \frac{Fa^2 b^2}{3EIL}}$$

المثال 3 : عارضة ناتئة كما في الشكل مع حمولة موزعة بشكل مثلث . القيمة القصوى لهذه الحمولة F_0، المطلوب إنحراف العارضة δ_B في إنتهائها الحرّ B

**نستعين بالحمولة الفرضية F في النقطة B لتعين الإنحراف في هذه النقطة (ثم نساوي هذه القيمة الفرضية مع الصفر)*



$$M = -Fx - \frac{F_0 x^3}{6L}$$

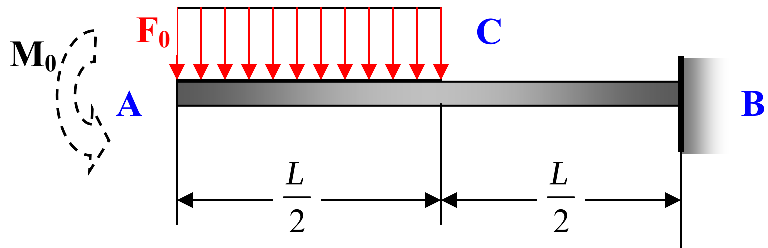
$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^L \left(Fx - \frac{F_0 x^3}{6L}\right)^2 dx \Rightarrow U = \frac{F^2 L^3}{6EI} + \frac{FF_0 L^4}{30EI} + \frac{F_0^2 L^5}{42EI}$$

$$\delta_B = \frac{dU}{dF} \Rightarrow \delta_B = \frac{d}{dF}\left(\frac{F^2 L^3}{6EI} + \frac{FF_0 L^4}{30EI} + \frac{F_0^2 L^5}{42EI}\right) \overset{F=0}{\Rightarrow} \delta_B = \frac{F_0 L^4}{30EI}$$

المثال 4 : عارضة ناتئة ABC كما في الشكل حمولة موحدة تأثر على نصف العارضة من النقطة A الى النقطة C . المطلوب زاوية دوران العارضة θ_A في النقطة A في الإنتهاء الحرّ من العارضة .

العزم الفرضي M_0 لتعين زاوية الدوران θ_A



$$M_{AC} = -M_0 - \frac{F_0 x^2}{2} \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2} \qquad \frac{\partial M_{AC}}{\partial M_0} = -1$$

$$M_{CB} = -M_0 - \frac{F_0 L}{2}(x - \frac{L}{4}) \qquad \frac{L}{2} \le x \le L \qquad \frac{\partial M_{CB}}{\partial M_0} = -1$$

$$\theta_A = \frac{\partial M}{\partial M_0}$$ زاوية الدوران في الإنتهاء الحرّ من العارضة

$$\theta_A = \int \left(\frac{M}{EI}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right) dx$$ راجع روابط الصفحة 5

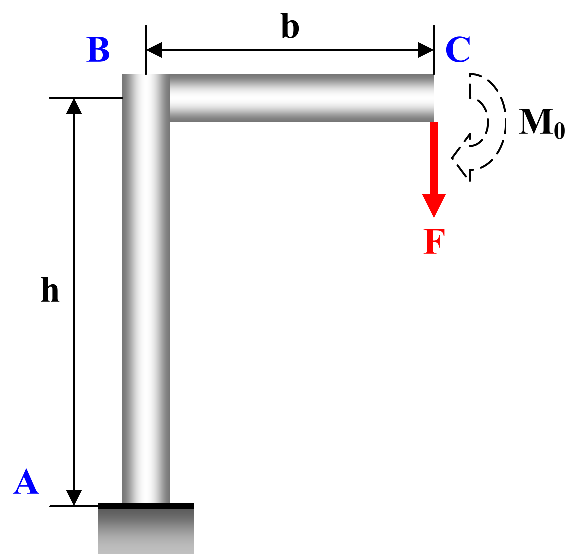
$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} \left(-M_0 - \frac{F_0 x^2}{2}\right)(-1)dx + \frac{1}{EI}\int_{\frac{L}{2}}^{L} \left[-M_0 - \frac{F_0 L}{2}(x - \frac{L}{4})\right](-1)dx$$

نساوي العزم الفرضي M_0 مع الصفر نحصل على :

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{F_0 x^2}{2} dx + \frac{1}{EI}\int_{\frac{L}{2}}^{L} \left[\frac{F_0 L}{2}(x - \frac{L}{4})\right] dx \Rightarrow \theta_A = \frac{F_0 L^3}{48EI} + \frac{F_0 L^3}{8EI}$$

$$\boxed{\theta_A = \frac{7F_0 L^3}{48EI}}$$

المثال 5 : إطار ABC كما في الشكل مثبت مع حمولة F متمركز في النقطة C . طول كل من الأعضاء AB و BC بالترتيب يساوي h و b . المطلوب الإنحراف القائم و زاوية الدوران في النقطة C من هذا الإطار .



M_0 عزم فرضي في النقطة C

$$M_{AB} = Fb + M_0 \qquad 0 \le x \le h$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial F} = b \qquad \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_0} = 1$$

$$M_{BC} = Fx + M \qquad 0 \le x \le b$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial F} = x \qquad \frac{\partial M_{BC}}{\partial M_0} = 1$$

$$\delta_C = \int \left(\frac{M}{EI}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial F}\right) dx$$

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\int_0^h (b + M_0)(b)dx + \frac{1}{EI}\int_0^b (Fx + M_0)(x)dx$$

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\int_0^h Fb^2 dx + \frac{1}{EI}\int_0^b Fx^2 dx$$ بعد أن نضع $M_0 = 0$

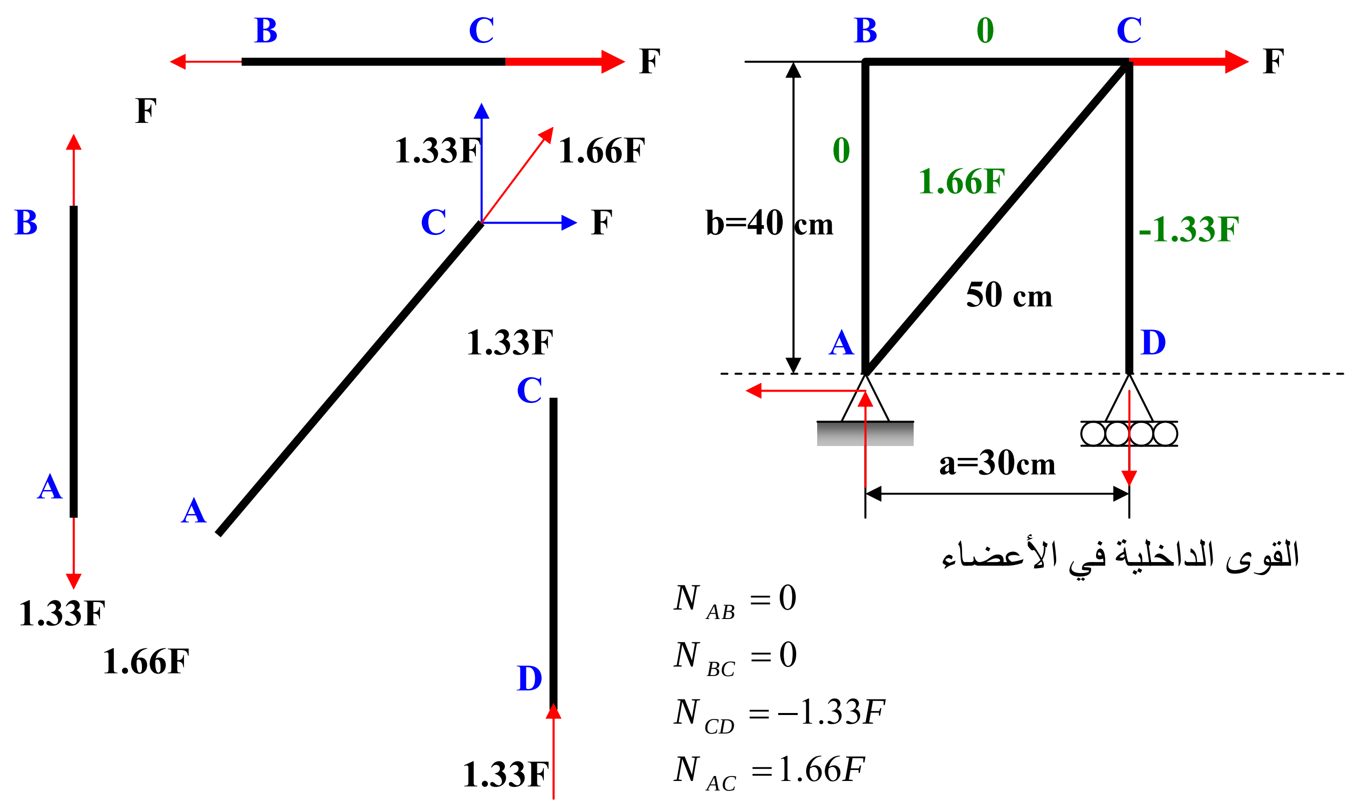
$$\delta_C = \frac{Fb^2}{3EI}(3h + b)$$

$$\theta_C = \int \left(\frac{M}{EI}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right) dx \Rightarrow \theta_C = \frac{1}{EI}\int_0^h (b + M_0)(1)dx + \frac{1}{EI}\int_0^b (Fx + M_0)(1)dx$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\int_0^h Fb dx + \frac{1}{EI}\int_0^b Fx dx$$ بعد أن نضع $M_0 = 0$

$$\theta_C = \frac{Fb}{2EI}(2h + b)$$

المثال 6 : تعين إزاحة الجملونات من خلال طريقة كاستليانو ، المطلوب الإزاحة الأفقية للنقطة C إذا كانت $F = 100kN$ و$E = 200Gpa$ و مساحة مقطع الأعضاء $240mm^2$



القوى الداخلية في الأعضاء

$$N_{AB} = 0$$
$$N_{BC} = 0$$
$$N_{CD} = -1.33F$$
$$N_{AC} = 1.66F$$

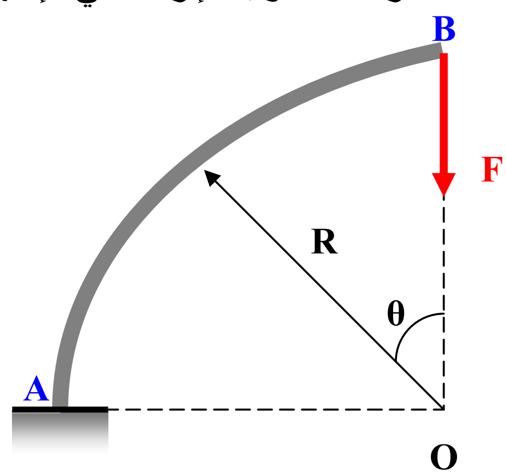
العضو	N	$\frac{\partial N}{\partial F}$	N×F kN	L mm	$N\left(\frac{\partial N}{\partial F}\right)L$
AB	0	0	0	400	0
BC	0	0	0	300	0
AC	1.66F	1.66	166	500	137.78×10^6
CD	-1.33F	-1.33	-133	400	70.75×10^6

$$\delta_i = \sum\left(\frac{\partial N_i}{\partial F}\right)\frac{N_i}{AE}L_i$$

$$\delta_C = 0 + 0 + \frac{137.78\times10^6 N \times mm}{240mm^2\times(200\times10^3 N/mm^2)} + \frac{70.75\times10^6 N \times mm}{240mm^2\times(200\times10^3 N/mm^2)} = 4.3mm$$

$$\delta_C = 4.3mm$$

مثال 7 : عارضة ناتئة بشكل ربع دائرة نصف قطرها R قوة متمركزه F في إنتهائها الحرّ ، المطلوب الإزاحة في الإنتهاء الحر .



$$M = FR\sin\theta$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \overset{dx=Rd\theta}{\Rightarrow} U = \int_0^\theta \frac{(FR\sin\theta)^2 R d\theta}{2EI}$$

$$U = \frac{F^2R^3}{2EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta$$

$$U = \frac{F^2R^3\pi}{8EI}$$

$$\delta_B = \frac{dU}{dF_B} \Rightarrow \delta_B = \frac{d}{dF}\left(\frac{\pi F^2R^3}{8EI}\right)$$

$$\delta_B = \frac{\pi FR^3}{4EI}$$

المصادر :

Shigley's Mechanical Engineering Design, Eighth Edition, McGraw-Hill

الأمثلة من المثال 1 الى 5 من المصدر التالي

http://www.aaronklapheck.com/Downloads/Engr112_Handouts/ENGR112%20Solutions/09-05ChapGere%5B1%5D.pdf

جلال الحاج عبد

2010- 9 – 11

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com