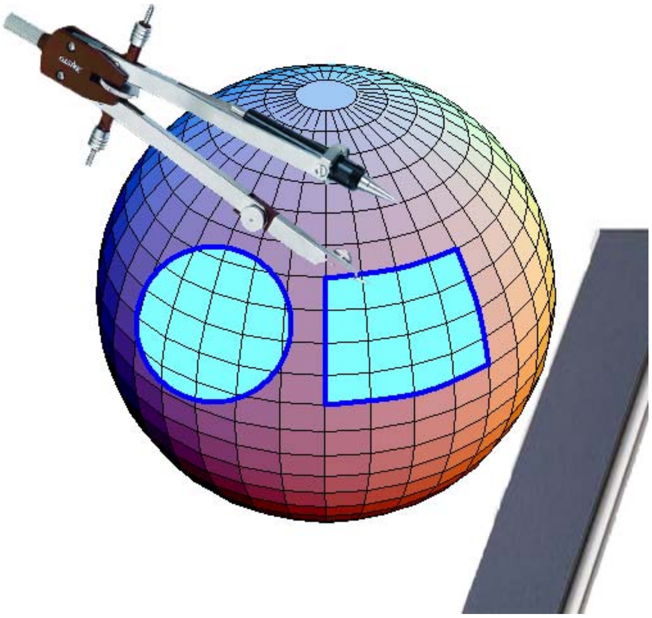
بســم الله الرحــمن الرحــيم



مجال في الخيال

تعتبر مسئلة تربيع الدائره (بناء مربع له نفس مساحة دائره معطاة بإستخدام المسطره و الفرجار فقط) من المسائل المهمه و العصيبه في الهندسه الإقليديه ، وقد عجزت الهندسه الإقليديه من إعطاء حلّ أو برهان لها ، و أكتفت ببرهان عدم إمكان حلها وذلك بعد مضي قرابة خمسة و عشرون قرناً على طرحها !

صرفت وقتاً طويلاً لاجد حلاً لهذه المسئلة لكن دون جدوى ، وعندما سمعت عن برهان عدم إمكان حلها فكرت بإمكانية حلها في هندسة أخرى أو فضاء آخر، حتى توصلت إلى إمكانية حل حالات خاصة منها على سطح الكرة و التي هي نموذج الهندسة الإهليلجية . يوجد حلّ لهذه المسئلة في الهندسة الهذلولية .

طريقة حلي لحالة خاصة لهذه المسئله في الهندسة الإهليلجية تعتمد على إمكانية رسم مربع بالمسطرة الغير مدرجة و الفرجار لدائرة معطاة على سطح كرة زاوية رأس مخروطها $\frac{\pi}{6}$.

في الهندسه التفاضليه هناك قضيه[1] يمكن من خلالها محاسبة مساحة مضلع على سطح ، نتيجة هذه القضيه هذا القانون :

$$\iint K dA + \oint k_g ds = \sum \alpha_i - (n-2)\pi$$

K تقوّس السطح

k_g تقوس الجيوديسي

dA جزء المساحة من الناحية المرسومة على السطح

ds جزء الطول من المنحني الذي يحيط المساحة المرسوم على السطح

α_i الزوايا الداخلية للمضلع المرسوم على السطح

n عدد أضلاع المضلع

1-Gauss-Bonnet theorem

مثال : مساحة مثلث على الصفحة و الكرة و الشبه كرة[1] و مجموع الزوايا الداخليه لكل من هذه المثلثات :

- تقوس الكرة $K = \frac{1}{R^2}$ و مساحة المثلث على الكرة A_{s-t} عدد الأضلاع $n = 3$ و مجموع الزوايا الداخلية $\alpha + \beta + \gamma$ و للخطوط المتقاصرة للكرة تقوس الجيودسي صفر $\oint k_g ds = 0$

إذن:
$$\frac{1}{R^2} A_{s-t} = \alpha + \beta + \gamma - \pi \Rightarrow A_{s-t} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

- تقوس شبه الكرة $K = -\frac{1}{R^2}$ و مساحة المثلث على شبه الكرة A_{t-t} عدد الأضلاع $n = 3$ و مجموع الزوايا الداخلية $\alpha + \beta + \gamma$ و للخطوط المتقاصرة لشبه الكرة تقوس الجيودسي صفر $\oint k_g ds = 0$ إذن :

$$-\frac{1}{R^2} A_{t-t} = \alpha + \beta + \gamma - \pi \Rightarrow A_{s-t} = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$

- تقوس الصفحة $K = 0$ و مساحة المثلث على الصفحة A_{p-t} عدد الأضلاع $n = 3$ و مجموع الزوايا الداخلية $\alpha + \beta + \gamma$ و للخطوط المتقاصرة للصفحة تقوس الجيودسي صفر $\oint k_g ds = 0$ إذن :

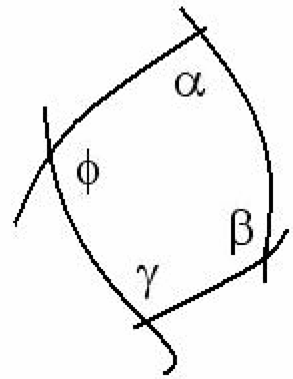
$$0 \times A_{p-t} = \alpha + \beta + \gamma - \pi \Rightarrow 0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

من هذه الأمثله يتضح إن مجموع الزوايا الداخليه للمثلث على الكرة أكبر من 180 درجة و على الصفحة يساوي 180 درجة و للمثلث المرسوم على شبه الكرة أصغر من 180 درجة و كل من هذه السطوح هي نموذج لبناء نوع من الهندسة . تعرف القيمة $(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$ بنقصان المساحة [2] و للصفحة هذه القيمة تساوي صفر لأن نصف قطر تقوّس الصفحة ما لا نهاية بالنتيجة تقوّس الصفحة صفر .

1- pseudosphere

2- للمزيد من المعلومات حول هذه المواضيع يرجى مطالعة كتابي نظرية النسبية العامة لأنشتاين الموجود على الموقع http://www.jalalalhajabed.com/general_relativity.pdf

إذا كان المضلع هو مربع على سطح كره يصبح قانون الصفحة الأولى بهذا الشكل :



$$\iint K dA + \oint k_g ds = \alpha + \beta + \gamma + \phi - 2\pi$$

بما إن أضلاع هذا المربع هي خطوط متقاصره على سطح الكره إذن

$$\oint k_g ds = 0$$

كذلك تقوس الكره موجب و قيمته ثابته و تساوي معكوس تربيع نصف قطرها لذلك:

$$\iint K dA = \frac{1}{R^2} A_s$$

A_s مساحة المربع على سطح الكره

الزوايا الداخليه لهذا المربع مساوية ، و نفرض إنها تساوي :

$$\alpha = \beta = \gamma = \phi = \frac{3\pi}{4}$$

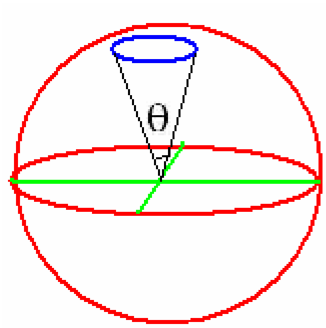
في الهندسه الإهليلجيه مجموع زوايا المربع أكبر من مجموع أربع زوايا قائمه . إذن مساحة هذا المربع تساوي:

$$\frac{1}{R^2} A_s = \pi \Rightarrow A_s = \pi R^2$$

مساحة دائره على سطح كرة :

A_c مساحة الدائره على سطح الكره

$$A_c = 2\pi R^2(1-\sin\theta)$$



نفرض زاوية رأس هذا المخروط $\frac{\pi}{6}$ إذن :

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow A_c = \pi R^2$$

كما تلاحظون فإن مساحة هذه الدائره على هذه الكره تساوي مساحة المربع المرسوم عليها كذلك هذه الزوايا $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{3\pi}{4}$ يمكن رسمها بالفرجار و المسطره الغير مدرجه .

يعتبر هذا الحل محاوله بسيطة للبحث عن حلول في فضاءات و هندسات أخرى ، و قد بحثت حول إمكانية العثور على حلول في الصفحة الخيالية في مقال آخر بعنوان التطبيق[1] يمكن مراجعته . لكن يبقى سؤال هل ستبقى طبيعة وسائل القياس في هذه الهندسات ثابتة ؟ أم هي كذلك ستتغير بالنتيجة لا يمكن رسم زاوية 30 درجة بالفرجار و المسطرة الغير مدرجة ! (يجب البحث في إمكانية أو عدم إمكانية رسم هذا المربع مع هذه الزوايا على سطح الكرة) ليس الغرض من هذه المقاله و المقالات الأخرى التي عرضتها هو التشكيك أو الأستخفاف بالمسائل و القضايا و لا أريد أن أضع طرق للهروب من الواقع الطبيعي للأمور أو أسعى لتغير ماهية المسائل ، هدفي من هذه المواضيع هو إمكانية اللا ممكن سواءاً في الواقع أم في الخيال ...

بعض الإصطلاحات المندرجة في هذه المقالة

Squaring the circle	تربيع الدائره
Elliptic geometry	هندسه إهليلجيه
Hyperbolic geometry	هندسه هذلوليه
Geodisic	متقاصر
Geodesic curvature	التقوس الجيوديسي

1- http://www.jalalalhajabed.com/mapping.pdf

جلال الحاج عبد

شتاء 1998

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com