بســم الله الرحــمن الرحــيم

حساب التغيرات

و

ميكانيك لاغرانج

Calculus of variations and Lagrangian Mechanics

حين أتممت الدراسة في الجامعة دخلت الحياة بلا هوية و لا جنسية ، كانت لي معلومات كثيرة في مجالات العلوم و الفنون المختلفة ، و كانت لي مكتبة تضم أنواع الكتب التي إقتنيتها في دوران حياتي و دراستي مجموعة كبيرة من الكتب ، لعدم إستقراري حيث كان عدم الإستقرار ملازمنا و كنت مهدد بالتبعيد في كل لحظة ، فقد كان التبعيد في حياتي و حياة إسرتي أمر طبيعي ، تخلصت من أشياء عديدة كانت تربطني و إيها ذكريات و آخر ما تخلصت منه تلك الكتب ، و كان مصيرها هو إهدائها لأحد المكتبات العامة .

أحتضنت ذاكرتي كمّ هائل من المعلومات و الروابط الفيزيائية و الرياضية و الهندسية ، غابت مصادرها عن يدي و خشيت أن تغيب هي كذلك من ذاكرتي ، فشرعت بإستذكارها و تدوينها . كل

سطر من هذه السطور أخذ مني أجمل لحظات عمري و صحتي ، و لكي أتوصل الى حقيقة أي موضوع و تبسيطه لكي أستطيع أستيعابه و عدم نسيانه كنت أجبر أن أقرأ عشرات الكتب لمعلومة واحده !

من المعلومات و المواضيع التي كنت أعتز بها حساب التغيرات و ميكانيك لاغرانج و معامل لاغرانج، لهذه المواضيع وسعة تجعلك عند حلّ مسئلة كأنك تواجه المسائل كلها . تسوقك هذه المواضيع الى حقيقة هي إن خلف الأمور قضايا لا يمكن تجاهلها ، و بساطة لا يمكن الأستخفاف بها.

تسعى الظواهر الطبيعة لأداء و ظائفها بأبسط صوره ممكنه تستهلك فيها أقلّ قيمه ممكنه من الطاقة ، فمثلاً تأخذ فقاعات الصابون الشكل الكروي ، لتأخذ السلسله المعلقة بين نقطتين التوازن تسعى للحصول على أقلّ قيمة من الطاقة الكامنة ، تأخذ الأجسام في السقوط الحرّ مسير مستقيم ، و غيرها من الظواهر الأخرى . خلف جميع الظواهر الصعبة و المضطربة هناك روابط في منتهى البساطة ، ألقت هذه الأفكار البسيطة فكرة إستنتاج مبدأ عام يمكن من خلاله إستنتاج ميكانيك نيوتن ، و كانت نتيجة هذا الإستنتاج هو الوصول الى مبدأ هاميلتون و حساب التغيرات (Calculus of variations).

أحد التعابير لمبدأ هاميلتون و الذي يناسب مع هذا البحث هو : في طول مسير الحركة تسعى الطبيعة أن تساوي بين الطاقه الحركية و الطاقة الكامنة .

هذه بعض المواضيع و المفاهيم في حساب التغيرات و ميكانيك لاغرانج مع بعض الأمثله البسيطة لفهم الروابط التي تحكم على هذه المواضيع .

حساب التغيرات

حساب التغيرات من المواضيع الشيقه التي تربط المعادلات الرياضيه بحقيقتها الطبيعية . عند سقوط شئ في السقوط الحرّ نعلم بأنه يسلك مسير مستقيم ، و عندما يتحرك شئ على سطح جسم فضائى في حالة طبيعية فأنه يسير على أقصر مسير و يعرف هذا المسير بالجيوديسيه . في حساب التفاضل و التكامل مفهوم القيمه القصوى و الدنيا أو النقاط المُثلى من المواضيع المهمة في هذا الحساب ، كذلك في حساب التغيرات هو البحث عن دوال قصوى و دنيا .

نبدأ بالبحث عن الدالة $y=(x)$ التي يصبح فيها $I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y',y)dx$ حالة مُثلى .

الهدف هو تعين الدالة $y=(x)$ ، بحيث من خلالها يصل هذا التكامل :

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y',y)dx$$

حالة مُثلى (optimal) قيمة أو دالة قصوى أو دنيا .

جواب هذه المعادلة التي تعرف بمعادلة أويلر تعطي $y=(x)$ و المعادلة هي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'}\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y}\frac{dy}{dx}+(\frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})=0$$

هذه المعادلة حالة عامة و هناك حالات خاصة في هذه المعادلة نبحثها :

الحالة الأولى : غياب المتغير x و y من الدالة f أي الدالة f بهذا الشكل : $f(y')$ و رابطة التكامل بهذا الشكل: $I=\int_{x_1}^{x_2} f(y')dx$

الجواب:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'}\frac{d^2 y}{dx^2}=0$$

في هذه الحالة إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'}\neq 0$ إذن $\frac{d^2 y}{dx^2}=0$ و جواب هذه المعادلة هي خطوط مستقيمة .

إذن في هذه الحالة القيم القصوى و الدنيا خطوط مستقيمة .

الحالة الثانية : غياب المتغير y من الدالة f أي الدالة f بهذا الشكل : $f(x,y')$ ، رابطة التكامل بهذا الشكل : $I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y')dx$

الجواب :

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})=0$$

تكامل هذه الرابطة هو :

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=c_1$$

الحالة الثالثة : غياب x من f ، في هذه الحالة تصبح f بهذا الشكل : $f(y',y)$ و رابطة التكامل بهذا الشكل : $I=\int_{x_1}^{x_2} f(y',y)dx$

الحواب :

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f=c_1$$

مثال : ما هو أقصر مسير بين النقطة (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على الصفحة ؟

ما نعلمه هو أن أقصر مسير بين نقطتين على الصفحة خط مستقيم ، لكن سنبرهن على هذه المقولة من خلال حساب التغيرات :

من الهندسة التفاضليه جزء الفاصلة بين نقطتين هي : $ds = \sqrt{1 + (y')^2}$ إذن رابطة التكامل التي من حلها نحصل على الدالة القصوى او الدنيا لهذه الرابطة هي :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

في هذه الرابطة المتغيران x و y غائبان ، إذن تنطبق هذه الحالة على الحالة الأولى و بما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'} \neq 0$ لذلك فالجواب خطوط مستقيمة .

مثال : ما هو المنحني الواصل بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بحيث السطح الناتج من دوران هذا المنحني حول محور x ، مساحة سطحه الأقلّ .

جزء المساحة لسطح ناتج من دوران منحن حول محور x هو : $dS = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}$ و رابطة التكامل هي :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

تنطبق هذه الحالة على الحالة الثالثة و الجواب :

$$\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f = c_1 \Rightarrow \frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - y\sqrt{1+(y')^2} = c_1$$

جواب هذه المعادلة :

$$y = c_1 \cosh(\frac{x - c_2}{c_1})$$

هذا المنحن هو منحني السلسلة .

في هذه الرابطة c_1 و c_2 ثوابت التكامل .

حساب التغيرات مع قيود

الهدف تعين الدالة $y=(x)$ بحيث يصل من خلالها هذا التكامل :

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y',y)dx$$

الى حالة مُثلى مع هذا الشرط أو القيد :

$$J=\int_{x_1}^{x_2} g(x,y',y)dx=C$$

أولاً نعرف الدالة F بهذا الشكل :

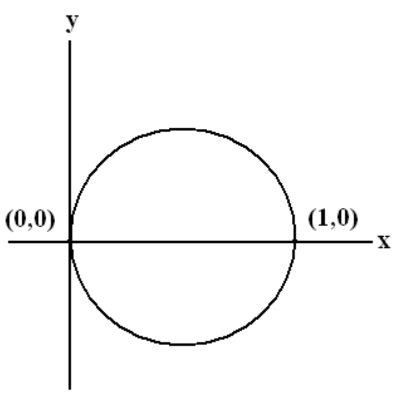
$$F=f+\lambda g$$

في هذه الرابطة λ معامل

من خلال حلّ هذه المعادلة الأشتقاقية يمكن الحصول عل الدالة $y=(x)$ المعادلة هي :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

مثال : ماهو المنحن ذو الطول الثابت L ، و الذي يربط النقطة $(0,0)$ بالنقطة $(1,0)$ ، و يشكل أكبر مساحة بين المنحن هذا و محور x (فوق محورx) ؟



مساحة المنحن هي $\int_0^1 y dx$ و القيد هو $L=\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ إذن :

$$F=f+\lambda g \Rightarrow F=y+\lambda\sqrt{1+(y')^2}$$

و المعادله هي :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)-1=0$$

جواب هذه المعادلة :

$$\frac{y''}{\left[\sqrt{1+(y')^2}\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\lambda}$$

و المنحن هو عبارة عن دائرة نصف قطرها λ لأن الإنحناء هو إنحناء دائرة .

الصيغه العامة لمعادلة لاغرانج

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(K.E.)-\frac{\partial}{\partial q_i}(K.E.)+\frac{\partial}{\partial q_i}(K.P.)+\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(D.E.)=Q_i$$

K.E الطاقة الحركية

P.E الطاقة الكامنه (Potential energy)

D.E الطاقة المستهلكة ، مثلاً مقاومة النابظ

Q_i القوى الخارجية

q_i الأحداثيات العمومية المستعملة الى i

دالة لاغرانج :

$$L = K.E. + P.E$$

في هذه الدالة الطاقه الحركيه هي مثل :

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \quad و \quad \frac{1}{2}mv^2$$

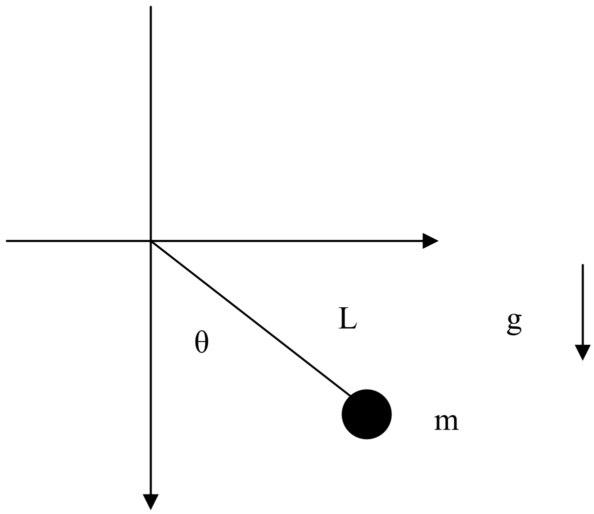
و الطاقه الكامنه هي مثل :

$$mgx \quad و \quad \frac{1}{2}kx^2$$

معادلة لاغرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

معادلة البندول

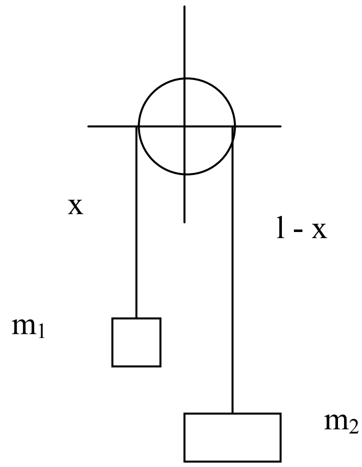


$$\left.\begin{array}{l} K.E.=\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 \\ \\ P.E.=mgl(1-\cos\theta) \end{array}\right\} \Rightarrow L=K.E.-P.E.\Rightarrow L=\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=ml^2\ddot{\theta} \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \theta}=-mgl\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

ماكنة أتوود Atwood Machine

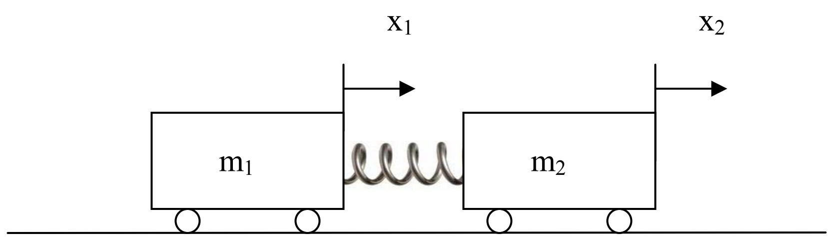


$$\left.\begin{aligned} K.E. &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 \\ P.E. &= -m_1gx - m_2g(l-x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_1gx + m_2g(l-x)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\ddot{x} \\ &\frac{\partial L}{\partial x} = (m_1-m_2)g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} - (m_1-m_2)g = 0$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x} - (m_1-m_2)g = 0$$

معادلة الحركه الأرتعاشية



$$K.E. = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

$$Q_i = 0$$

$$D.E. = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2) - \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}(0) = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

معامل لاغرانج

معامل لاغرانج هي طريقه رياضيه يمكن من خلالها تعين القيمه أو الداله القصوى أو الدنيا لمسئلة ما . نفرض أن الداله f لها قيمه قصوى أو دنيا على مجموعة الدوال g_i ، بحيث المعامل λ_1 ، λ_2 ، λ_3 ، و غيرها إذن :

$$\nabla f(Max.orMin.Points) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(Max.orMin.Points)$$

في هذه الرابطة :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

يمكن شرح هذه الرابطة من خلال هذا المثال :

ما هو أقلّ سطح جانبي لمكعب مستطيل ، حجمه ثابت و يساوي V ؟

في هذه الرابطة g_1 ، g_2 ، g_3 و غيرها هي بمثابة القيود المفروضة على المسئلة و لكل قيد من هذه القيود معامل مثل λ_1 ، λ_2 ، λ_3 ، و غيرها إذن

السطح الجانبي للمكعب مستطيل هو :

$$S = f(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$$

القيد المفروض على هذه المسئلة هو ان حجم المكعب ثابت إذن :

$$xyz = V \Rightarrow g(x,y,z) = xyz - V$$

من قانون معامل لاغرانج :

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda g(x,y,z)$$

إذن

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\Rightarrow 2y+2z=\lambda yz\Rightarrow\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}\Rightarrow 2x+2z=\lambda zx\Rightarrow\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g}{\partial z}\Rightarrow 2x+2y=\lambda xy\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{\lambda}{2}$$

هذه ثلاثة معادلات و أربعة مجهولات هناك معادلة رابعة تضاف الى هذه المعادلات ليمكن حلّ هذه المعادلات هي :

$$xyz=V$$

من هذه المعادلات نستنتج ان $x=y=z$

و هذا بمعنى ان من بين جميع المكعبات المستطيلة ، المكعب المستطيل ذو أقلّ مساحة و حجمه ثابت هو المكعب .

في هذه المسئلة هناك قيد و احد هو $g(x,y,z)=xyz-V$ بالنتيجه هناك معامل واحد هو λ . إن كان في المسئلة عدة قيود فكذلك فيها بعدد القيود معامل .

في المسائل الهندسية أو الميكانيكية التي فيها تخضع المسئلة لعدة قيود يمكن حلّها من خلال هذه التقنية الرياضية .

جلال الحاج عبد

13.02.2008

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com