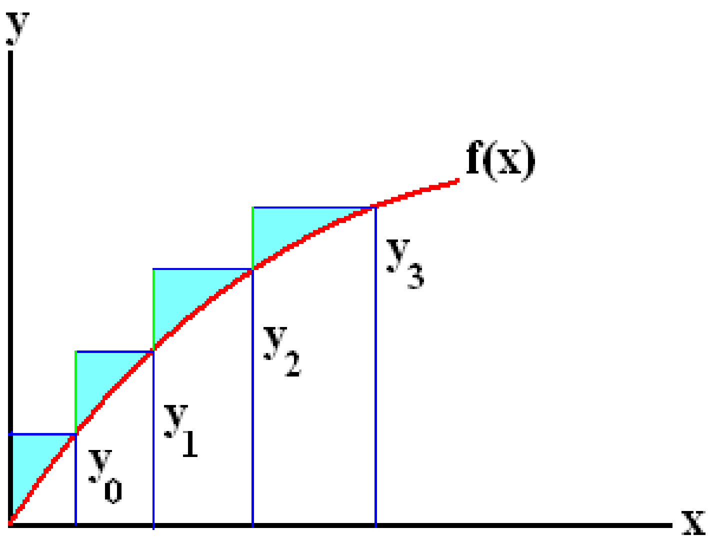
تقريب المتتاليات العدديه



من خلال الرابطة التي سنتوصل إليها يمكننا أن نحسب قيمة المتتاليات خصوصاً المتتاليات التي هي على شكل مجموع .

كثير من المتتاليات لا تخضع لروابط بسيطه ، لكن من خلال هذا التقريب يمكن الوصول الى روابط بسيطه لكثير من المتتاليات .

هذه الرابطة هي :

نجزء المنحن الى مربعات مستطيله صغيره جداً مساحة هذه المربعات هي قيمة المتتالية ، في نفس الوقت مساحة هذه المربعات المستطيله هي : المساحة تحت المنحني زائد المثلثات القائمة الزاويه فوق المنحن ، إذن :

$$S = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots = \int_{x_0}^{n} f(x)dx + \left[\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2) + \cdots + \frac{1}{2}(y_n - y_{n-1})\right]$$

المجموع يبدأ من الصفر أو من أي عدد آخر بحيث يمكن محاسبة تكامل الدالة بدون أي أبهام .

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} f(i) = \int_{x_0}^{n} f(x)dx + \frac{f(n)}{2}}$$

مثال : مجموع الأعداد من الواحد الى أي عدد مثل n الداله لهذا المجموع هي :
$f(x)=x$

$$1+2+3+4+\cdots+n=\int_0^n xdx+\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

مثال : المقدار التقريبي $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ الداله لهذا التقريب هي : $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\int_1^n \frac{1}{x}dx+\frac{1}{2n}=\ln n+\frac{1}{2n}$$

مثال : القيمه التقريبيه $1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$ الداله لهذا التقريب هي : $\ln n$

$$\ln 1+\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln n=\ln(1\times2\times3\times4\times\cdots\times n)$$

$$\ln(1\times2\times3\times4\times\cdots\times n)\approx\int_1^n \ln xdx+\frac{1}{2}\ln n=n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n$$

$$\ln n!\approx\int_1^n \ln xdx+\frac{1}{2}\ln n=n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n$$

$$n!\approx n\sqrt[n]{n}e^{1-n}$$

قابلية التقسيم على 19

العدد الذي يقبل القسمة على 19 هو العدد الذي مجموع أرقامه بلا آحاده زائد ضعف عدد الآحاد من ذلك الرقم يقبل القسمة على 19 .

نفرض أن العدد بهذا الشكل :

$$N = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^1 a_1 + a_0$$

نضرب طرفين هذه الرابطة في 2

$$2N = 2\times 10^n a_n + 2\times 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 2\times 10^1 a_1 + 2\times a_0$$

نلخص هذه العبارة بهذا الشكل:

$$2N = \underbrace{19\times 10^{n-1} a_n + 19\times 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + 19 a_1}_{19\times number} + (10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \cdots + a_1 + 2a_0)$$

يجب أن يكون العدد داخل ( ) يقبل التقسيم على 19 و هذا يعني مجموع أعداد العدد زائد عدد الآحاد .

مثال : 8664 يقبل القسمة على 19 لأن :

$$8664 \to 866 + 8 = \underbrace{874}_{19\times 46} \to 87 + 8 = \underbrace{95}_{19\times 5} \to 9 + 10 = 19$$

مثال : 14307 يقبل لبقسمة على 19 لأن :

$$14307 \to 1430 + 14 = \underbrace{1444}_{19\times 76} \to 144 + 8 = \underbrace{152}_{19\times 8} \to 15 + 4 = 19$$

قابلية التقسيم على 11

$$N = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10^1 a_1 + a_0$$
$$N = 1\underbrace{0\cdots0}_{n} a_n + 1\underbrace{0\cdots0}_{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$$
$$N = 1\underbrace{0\cdots0}_{n} a_n + 1\underbrace{0\cdots0}_{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$$
$$1\underbrace{0\cdots0}_{n} a_n = 1\underbrace{0\cdots1}_{n} a_n - a_n$$
$$1\underbrace{0\cdots0}_{n-1} a_{n-1} = \underbrace{99\cdots9}_{n-2} a_{n-1} + a_{n-1}$$

.

.

.

$$10a_1 = 11a_1 - a_1$$

نكتب العدد بهذا الشكل :

$$N = \underbrace{1\underbrace{0\cdots1}_{n} a_n + \underbrace{99\cdots9}_{n-2} a_{n-1} + \cdots + 11a_1}_{11\times number} - (a_n - a_{n-1} + \cdots + a_1 - a_0)$$

نفرض أن n في هذا الترتيب عدد زوجي ، إذا كان عدد فردي تتغير العلامات و النتيجه لا تتغبر .

يجب أن يكون العدد داخل ( ) يقبل القسمة على 11 أو صفر .

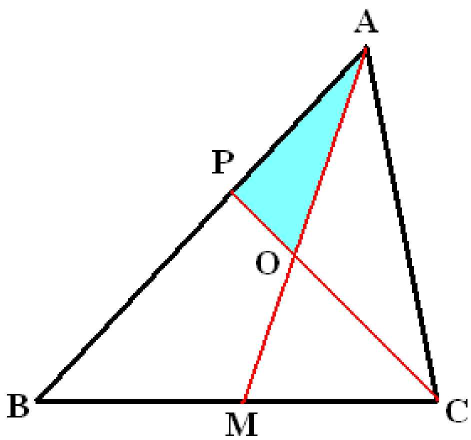
مثال : 1243 يقبل القسمة على 11 لأن :

$$1243 \rightarrow 1 - 2 + 4 - 3 = 0$$

مثال : 11187 يقبل القسمة على 11 لأن :

$$11187 \rightarrow 1 - 1 + 1 - 8 + 7 = 0$$

قضيه هندسيه



في المثلث ABC منصف الضلع CB هو MA ، نرسم الخط CP بحيث AO=MO

إثبت :

$$S_{OPA} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

أي إثبت مساحة المثلث PAO واحد على 12 من مساحة المثلث CBA .

الأثبات :

$$\left.\begin{array}{l} S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC} \\ \\ S_{AOC} = \frac{1}{2} S_{AMC} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{AOC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

لإثبات هذه القضيه أستعنت بقضية مينالوس ، الرابطة بين خطين متقاطعين داخل المثلث هي:

$$\frac{AP}{PB} \times \frac{BM}{BC} \times \frac{AO}{OM} = 1$$

بما أن في هذا المثلث : AO=MO إذن :

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BM}{\underbrace{BC}_{\frac{1}{2}BM}}\times\frac{AO}{\underbrace{OM}_{AO}}=1\Rightarrow PB=2AP$$

إذن :

$$S_{APC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$$

$$S_{AOP}=S_{APC}-S_{AOC}=\frac{1}{3}S_{ABC}-\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{1}{12}S_{ABC}$$

$$S_{OPA}=\frac{1}{12}S_{ABC}$$

التقوس الخيالي

تقوس السطوح موضع مهم في نظرية السطوح ، على سبيل المثال تقوس الصفحة صفر ، تقوس الكره موجب و تقوس الشبه كره سالب . عند مطالعتي لنظرية السطوح لغاوس خطر في بالي ماذا لو كان التقوس عدد خيالي ؟

في نظرية السطوح لغاوس ، معادلة السطح الدوار هي :

$x = f(u)\sin v$

$y = f(u)\cos v$

$z = h(u)$

f تابع من u و التقوس ثابت K يصدقان في هذه المعادله الأشتقاقيه :

$$\frac{d^2 f}{du^2} = -Kf$$

من حل هذه المعادله نحصل على h من هذه الرابطة :

$$f'^2 + h'^2 = 1$$

نفرض إن $K = i$ و $i = \sqrt{-1}$ إذن :

$\frac{d^2 f}{du^2} = -if$

$\frac{d^2 f}{du^2} = -if \Rightarrow f'' + if = 0$

نفرض $f = e^{\omega t}$ إذن :

$$f'' + if = 0 \Rightarrow \omega^2 e^{\omega t} + ie^{\omega t} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{-i}$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow (-i)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)t} \Rightarrow f' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)t} \Rightarrow f'^2 = -ie^{\sqrt{2}(1-i)t}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'^2 = -ie^{\sqrt{2}(1-i)t} \\ \\ f'^2 + h'^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow h' = \sqrt{1 + ie^{\sqrt{2}(1-i)t}} \Rightarrow h = \int \sqrt{1 + ie^{\sqrt{2}(1-i)t}}\, dt$$

$h = \int \sqrt{1 + ie^{\sqrt{2}(1-i)t}}\, dt$ هذه هي معادلة سطح تقوسه خيالي !

السؤال المهم هنا ما هو مفهوم السطح الخيالي ؟ إذا كان السطح حقيقي هل من الممكن ان يكون تقوس هذا السطح خيالي ؟

في هذا المثال التقوس خيالي ، و الداله التي سنتوصل اليها h كذلك خياليه .

حقل القوى الكونيه

توحي كروية قريب بأكثر الأجرام السماويه بالتناظر الكروي لحقل القوى الموجود في الكون ، و كل جسم لو تركناه في الفضاء بعد فترة زمنية طويله يصبح كروي او شبيه بشكل الكره .

نفرض أن جسماً شكله الهندسي يخضع للمعادلة $f(x,y,z)=0$ إذا كان هذا الجسم في حقل متجهي :

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

نفرض أن المقاومه الداخليه لهذا الجسم في هذا الحقل قليلة جداً ، أو أن قوة الحقل تفوق القوى الداخليه للجسم .

متجهة القوى العموديه على هذا السطح هي :

$$gra\vec{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$$

يتغير هذا الجسم أثر هذه القوة و بما أن المقاومه الداخليه بالنسبة لقوة الحقل ضعيفه فإن أجزاء الجسم أثر قوة هذا الحقل تتحرك على مسير جيوديسية هذا الجسم .

المتجهة $gra\vec{d}f\times\vec{F}$ هي مماس على السطح $f(x,y,z)=0$ و جهتها في جهة مسير الجيوديسيه . لذلك يجب أن تكون متجهة الإنحناء الجيوديسي لهذا السطح صفر .

الحقل ذو التناظر الكروي هو بشكل $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ لذلك:

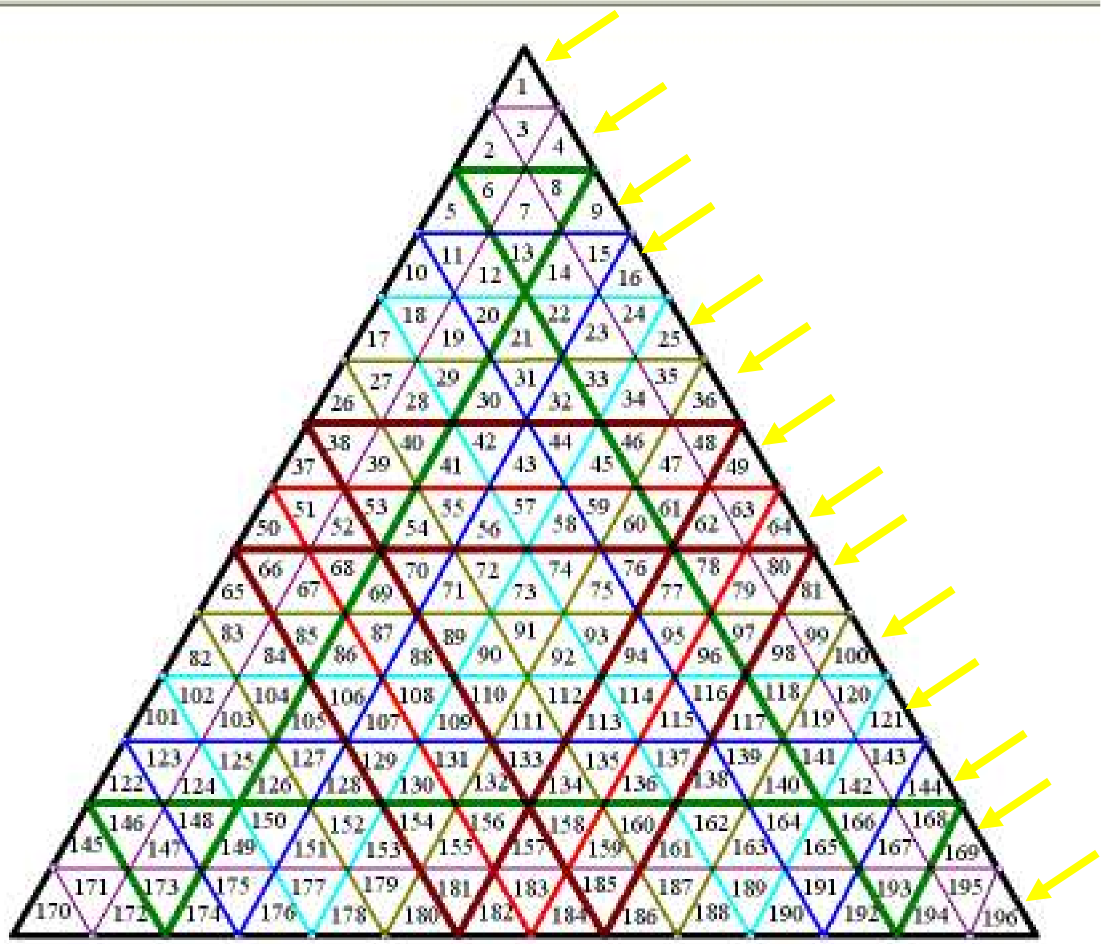
$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= x \Rightarrow f_x = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= y \Rightarrow f_y = \frac{1}{2}y^2 + c_2 \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= z \Rightarrow f_z = \frac{1}{2}z^2 + c_3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow f_x + f_y + f_z = c \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

في هذا الحقل الكروي الجسم كذلك كروي و متجهة الإنحناء صفر . و هذا يعني الجسم يتأثر بحقل القوى و يأخذ شكل حقل القوى ، وكذلك متجهة الإنحناء صفر و تعني أن الجسم عند تغير شكله حتى الوصول الى الشكل الكروي فهو يصرف أقلّ قيمة من الطاقة لتغير شكله .

الحقل ذو التناظر الكروي الموجود في الكون هو ليس دليل على كروية الكون ، فمثلاً أي حجم من الهواء داخل الماء يأخذ الشكل الكروي ، بينما شكل الماء ليس هو ليس كروياً . و قد أنتخبت الهواء لأن المقاومه الداخليه لجسم الهواء أو لفقاعة من الهواء بالنسبة لقوى الحقل الكروي المتناظر للماء قليلة جداً .

تربيع المثلث

تربيع الأعداد في المثلث . كانت هذه الخاصيه العدديه تختصر على المربع فقط لكن يمكن مشاهدتها اليوم على المثلث و بهذا الشكل :



الدوال المثلثاتيه الهذلوليه و المسطحه

متتالية الدالة e^x هي بهذا الشكل :

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

نعرف هذه الدوال بهذا الشكل :

$$f(x) = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

$$g(x) = x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

$$h(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$$

$$k(x) = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}$$

إذن :

$$f(x) + g(x) + h(x) + k(x) = e^x$$

هذه المعادله التفاضليه للدالة k :

$$\frac{d^3k}{dx^3} + \frac{d^2k}{dx^2} + \frac{dk}{dx} + k = e^x$$

متتالية الدوال المثلثاتيه الهذلوليه و المسطحة هي :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

الدوال المثلثاتيه الهذلوليه :

$$f(x) + h(x) = \cosh(x)$$

$$g(x) + k(x) = \sinh(x)$$

كذلك للدوال المثلثاتيه المسطحة :

$$g(x) - k(x) = \sin(x)$$

$$f(x) - h(x) = \cos(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cosh(x)+\cos(x))$$

$$h(x)=\frac{1}{2}(\cosh(x)-\cos(x))$$

$$g(x)=\frac{1}{2}(\sinh(x)+\sin(x))$$

$$k(x)=\frac{1}{2}(\sinh(x)-\sin(x))$$

من خلال هذه الروابط نلاحظ الأرتباط بين الدوال المثلثاتيه الهذلوليه و المسطحة .

الأعداد الأوليه

لقد وزعت الأعداد بطريقه بحيث الأعداد الأوليه التي تبدأ 1 أو 3 أو 5 او 7 أو 9 على عمود واحد . بهذا الشكل :

هذا الجدول للأعداد الأولية هو من برنامج كتبته بالإكسل فيجوال بيسك .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		3	*	5	*	7	*	*	*
11	*	13	*	*	*	17	*	19	*
*	*	23	*	*	*	*	*	29	*
31	*	*	*	*	*	37	*	*	*
41	*	43	*	*	*	47	*	*	*
*	*	53	*	*	*	*	*	59	*
61	*	*	*	*	*	67	*	*	*
71	*	73	*	*	*	*	*	79	*
*	*	83	*	*	*	*	*	89	*
*	*	*	*	*	*	97	*	*	*
101	*	103	*	*	*	107	*	109	*
*	*	113	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	127	*	*	*
131	*	*	*	*	*	137	*	139	*
*	*	*	*	*	*	*	*	149	*
151	*	*	*	*	*	157	*	*	*
*	*	163	*	*	*	167	*	*	*
*	*	173	*	*	*	*	*	179	*
181	*	*	*	*	*	*	*	*	*
191	*	193	*	*	*	197	*	199	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
211	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	223	*	*	*	227	*	229	*
*	*	233	*	*	*	*	*	239	*
241	*	*	*	*	*	*	*	*	*
251	*	*	*	*	*	257	*	*	*
*	*	263	*	*	*	*	*	269	*
271	*	*	*	*	*	277	*	*	*
281	*	283	*	*	*	*	*	*	*
*	*	293	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	307	*	*	*
311	*	313	*	*	*	317	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
331	*	*	*	*	*	337	*	*	*
*	*	*	*	*	*	347	*	349	*
*	*	353	*	*	*	*	*	359	*
*	*	*	*	*	*	367	*	*	*
*	*	373	*	*	*	*	*	379	*
*	*	383	*	*	*	*	*	389	*

jlanda

إذا كتبنا الأعداد الطبيعية بالترتيب من الواحد الى n في مقام كسر بسطه واحد ، سنحصل على عدد أول تقريب له هو 8.1 .

$$\lambda = 0.12345678910111213141516171819\ldots n$$

$$j = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.12345678910111213141516\ldots n}$$

8.1

1234567891011121314151617181
9202122232425262728293031323
3343436373839404142434445464
7484950515253545556575859606
1626364656667686970717273747
5767778798081828384858687888
9909192939495969798991001011
0210310410510610710810911011
1112113114115116117118119120
1211221231241251261271281291
3013113213313413513613713813
9140141142143144145146147148
1491501511521531541551561571
5815916016116216316416516616
7168169170171172173174175176
1771781791801811821831841851
8618718818919019119219319419
519619719819920

8.1

n=25

8.100000067076033613307319673834167877536008849514
49246281054309160598595678911226384692552225381083
01386722083701511136443869562388060637534816773712
82593926799945545998845972768668430028403467502659
37435905487715828815069266157134690672592966540452
75489085007606605066809926654018474309860294569205
86566406879695006668298791871276159558588613935566
16841387993074460131522480480347880410883178002306
00433921863651474636928568528965652905928763050325
78081796382207160092398595337686355486120799650567

n= 50

8.100000067076033613307319673834167877535836473478
57972252510475910050861769226508411612270396858371
9431349999816784694467447777916697130315886170773
20666173068877400726313607106343299923431234339068
70707217903546221317762919138236092198366152309805
22291781581525108893092413945014599046348572359734
45513768578297950673919840724824678279347547889723
07475206767283526189143503921346349833049165694731
15493916278016431224256797173186925072533613613112
15285222886266270130244201476226937389363880669881

n=100

8.100000067076033613307319673834167877535836473478
57972252510475910050861769226508411612270058800515
10455696444897470121011896327788564633331824006697
07852077951419490811394792542757187799657717572629
38903876348107628924611477677666255845320413399814
62786066835565345362918763997804910360919748573744
64484912372569487140992268099792621945242734510746
08470327921749860748618846555787408307770391496881
31946696083582804187107916412133095405898932296682
04344860452518820015845463694254957236238065820348

n=150

8.100000067076033613307319673834167877535836473478
57972252510475910050861769226508411612270058800515
10455696444897470121011896327788564633331824006697
07852077951419490811394792542757187799657710939320
29451767234228125599607457188351997476420453150742
98885608701413748955657471693793085972325440604050
81024227308848662024479383350925078744729435451533
96445615070821925077617984564004899521038815134466
47043338070803316626655591188358122123828831706810

59190816677197844619274498631522569424676288564773

n=200
8.100000067076033613307319673834167877535836473478
57972252510475910050861769226508411612270058800515
10455696444897470121011896327788564633331824006697
07852077951419490811394792542757187799657710939320
29451767234228125599607457188351997476420453150742
98885608701413748955657471693793085972325440604050
81024227308848662024479383350925078744729425534441
03176530236047662673486602098067774893203740768039
74353703684908685129773867263083754343655874747164
25939633903537919259254987587254294976733460744088

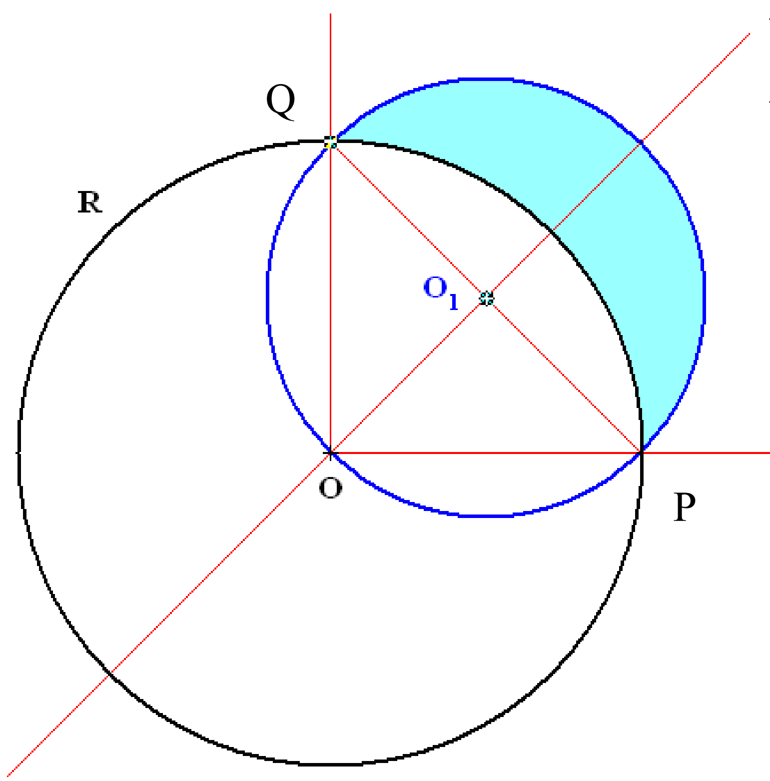
j=8.100000067076033613307319673834

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{10^{9}}{123\cdots9}+\frac{10^{90}}{10111213\cdots99}+\frac{10^{900}}{10010102\cdots999}+\cdots+\frac{10^{9\overbrace{00\cdots0}^{n-1}}}{1\underbrace{00\cdots0}_{n-1}\cdots\underbrace{99\cdots9}_{n}}$$

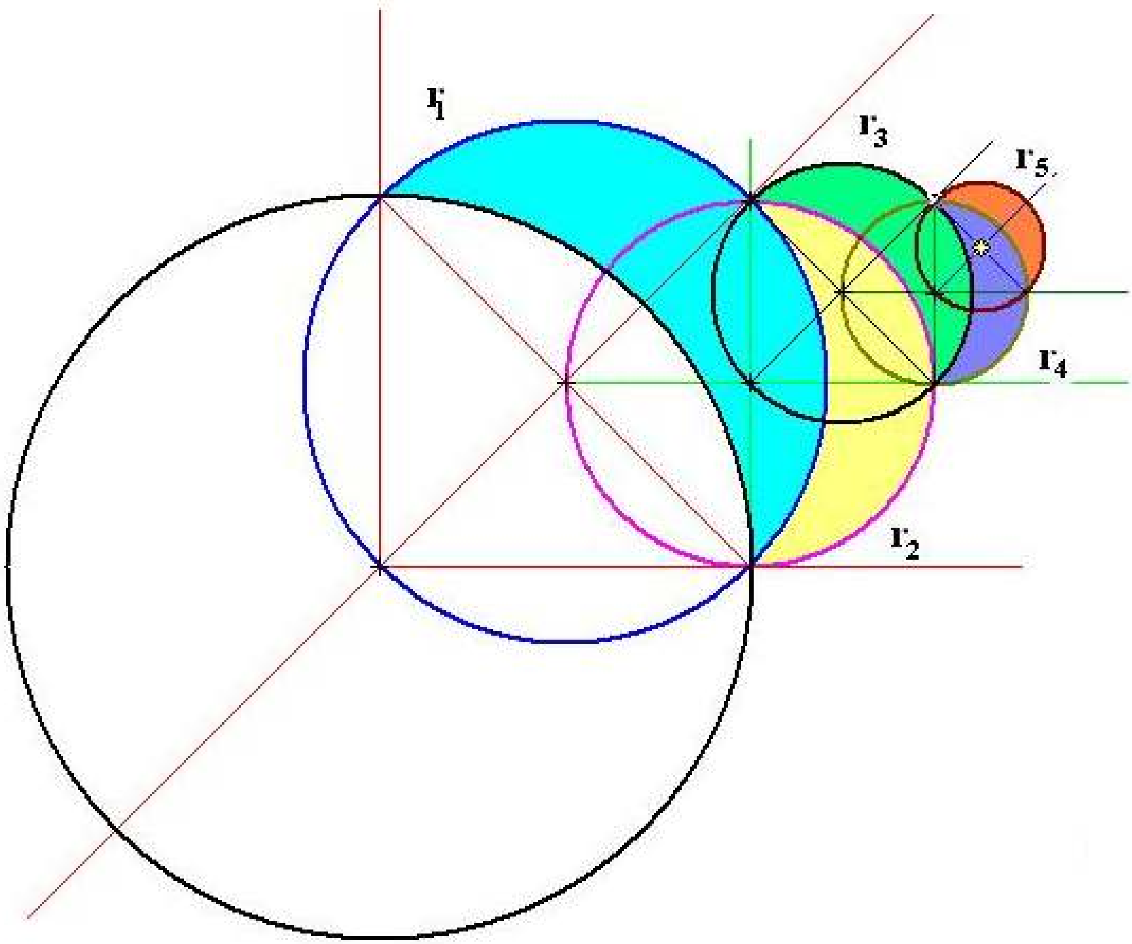
$$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{10^{1}}+\frac{2}{10^{2}}+\cdots+\frac{9}{10^{9}}+\frac{10}{10^{11}}+\frac{11}{10^{13}}+\frac{12}{10^{15}}+\cdots+\frac{n}{10^{\cdots}}$$

تربيع الأهلاله

O دائرة نصف قطرها R و O_1 دائرة نصف قطرها r_1 تمرّ من مركز الدائرة O و تقطعها كذلك في نقطتي تقاطعها مع أنصاف أقطارها P و Q .



إذا كررنا رسم الدوائر هذه الى ما لا نهاية



أنصاف أقطار هذه الدوائر هي :

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) R$$

$$r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) \right] R$$

.

.

.

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n R$$

مساحة الأهلة :

مساحة الهلال $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{1}{2} \cdot R^2 \right)$

مساحة الهلال 1 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot R^2$

مساحة الهلال 2 $S_2 = \frac{1}{4} \cdot R^2$

مساحة الهلال 3 $S_3 = \frac{1}{8} \cdot R^2$

مساحة الهلال 4 $S_4 = \frac{1}{16} \cdot R^2$

.

.

.

مساحة الهلال n $S_n = \frac{1}{2^n} \cdot R^2$

مجموع مساحة هذه الأهلة يساوي :

$$S_{new-moon} = R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = R^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \approx 1$$

$$S_{new-moon} = R^2$$

هذه المساحة تساوي مساحة مربع ضلعه يساوي نصف قطر الدائرة التي بنيّت عليها هذه الأهلة .

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com