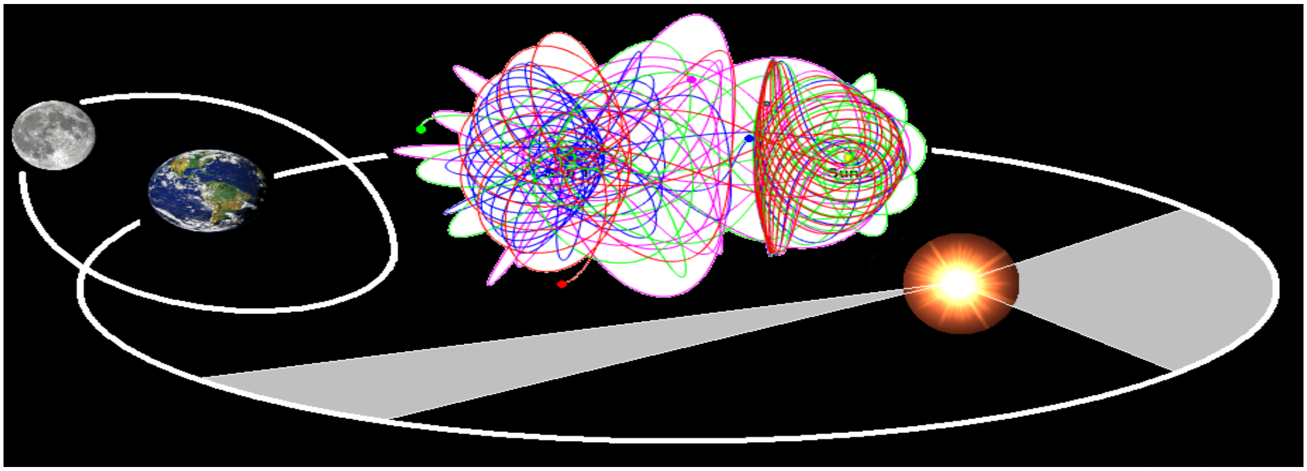
بســـم الله الرحـــمن الرحـــيم



الميكانيك السماوي و مسئلة الثلاث أجسام

الميكانيكا السماوية (celestial mechanics) أحد فرع علم الفلك (astronomy) يبحث حركة الأجرام السماوية كالكواكب و الأقمار متأثرة بقوة (أو مجال) الجاذبية ، و يعتبر من العلوم الكلاسيكية لإعتماده على الميكانيك الكلاسيكي . جذوره التأريخية ترجع الى آلاف السنين و الى البابليين بالتحديد ، ثورة كوبرنيك الفلكية و قوانين كبلر وضعت هذا العلم في مساره الصحيح حتى أصبح نقطة الأرتكاز لميكانيك نيوتن الذي أعاد بناء هيكله على أسس رياضية قوية و دقيقة . لميكانيك لاغرانج و ميكانيك النسبية العامة دور مهم في إثراء المفاهيم العملية و النظرية لهذا العلم . تعتبر مسئلة الثلاثة أجسام و التي ترقت الى مسئلة ال n جسم من المسائل المهمة في هذا العلم .

بدأت هذا البحث بإستنتاج قوانين كبلر من ميكانيك نيوتن ، و ميكانيك لاغرانج ثم إنتقلت الى السير التأريخي لمسئلة الثلاثة أجسام و حلها ، في الختام عرضت بعض النماذج لمسير حركة الأجسام تحت تأثير قوة (أو مجال) الجاذبية فيما بينها .

قانون الجذب العام لنيوتن و حركة الكواكب

تخضع حركة الكواكب حول الشمس ، و حركة الأقمار الإصطناعية حول الأرض و مسير حركتها (و بعض الظواهر الفيزيائية الأخرى) لقانون الجذب العام لنيوتن . سنستنتج في هذا البحث قوانين كبلر من قانون الجذب العام لنيوتن ، كذلك سنبحث حركة جسم بكتلة m حول جسم أكبر منه كتلته M متأثراً بقوة الجذب .

نضع الجسم الثابت M في مركز الأحداثي القطبي ، و نعرف المتجهة r من مركز الأحداثي الى مركز الجسم المتحرك m بهذه الصورة :

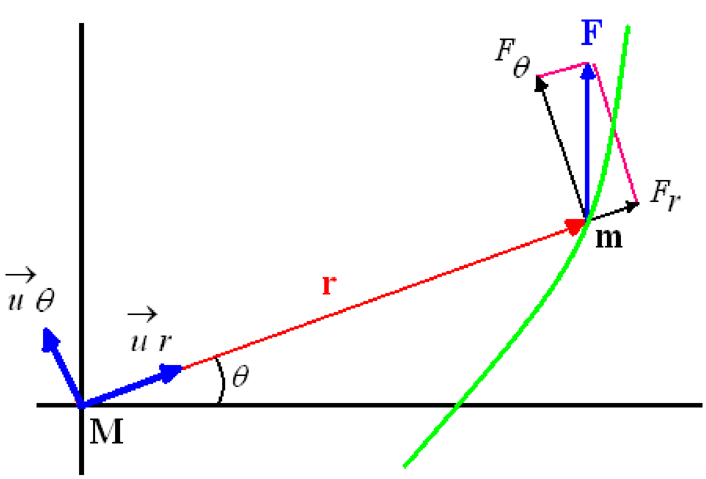
$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

الهدف أستنتاج معادلة سرعة و تعجيل الجسم m حول الجسم M .

$\vec{u}_r$ متجهة الوحدة في جهة r
و متجهة الوحدة $\vec{u}_\theta$ عمود على r

$$\vec{u}_r = i\cos\theta + j\sin\theta$$

$$\vec{u}_\theta = -i\sin\theta + j\cos\theta$$



تفاضل متجهة الوحدة

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dr} = -\vec{u}_r$$

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} = r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt}$$

السرعة

$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\vec{u}_r$$

التعجيل

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt})\vec{u}_\theta + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2\right]\vec{u}_r$$

القوة

$$\vec{F} = F_\theta\vec{u}_\theta + F_r\vec{u}_r$$

$$F_\theta = m(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt})$$

$$F_r = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2\right]$$

القوة المركزية

تعتبر القوة $\vec{F}$ قوة مركزية في حالة أنعدام القوة القائمة أو العمود على r أي $F_\theta = 0$ إذن:

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

نضرب طرفين هذه المعادلة في r

$$r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt}) = 0$$

جواب هذه المعادلة التفاضليه

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h$$

h ثابت . نفرض h مثبت أي الجسم m يدور خلاف جهة عقارب الساعة .

نفرض $A = A(t)$ السطح الناتج من مسح r للسطح حين حركته من وضعية الى أخرى، و مساحة جزء منه تساوي $dA = \frac{r^2 d\theta}{2}$ لذا :

$$dA = \frac{1}{2}(r^2 \frac{d\theta}{dt}) = \frac{1}{2} h dt$$

تكامل طرفين هذه المعادلة من t_1 الى t_2 هو :

$$A(t_2) - A(t_1) = \frac{1}{2} h (t_2 - t_1)$$

هذا هو قانون كبلر الثاني ، الناصّ على أن الخط الواصل بين الكوكب و الشمس في فواصل زمنية متساوية ، يمسح مساحات متساوية .

الثقالة المركزية

قوة الثقالة بين هذه الكتلتين حسب قانون الجذب العام لنيوتن هي :

$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}$ نفرض $k = GM$ إذن $F_r = -\frac{km}{r^2}$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2 = -\frac{k}{r^2}$$

لحل هذه المعادلة التفاضليه نفرض هذا المتغير $z = \frac{1}{r}$ مع العلم إن $r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$ إذن :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{z}) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{h}{r^2} = -h\frac{dz}{d\theta}$$

$$\frac{dr}{dt} = -h\frac{dz}{d\theta} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = -h\frac{d}{dt}(\frac{dz}{d\theta}) = -h\frac{d}{d\theta}(\frac{dz}{d\theta})\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2 z}{d\theta^2}\frac{h}{r^2} = -h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2}$$

تصبح المعادلة $\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2 = -\frac{k}{r^2}$ مع هذه المتغيرات : $r = \frac{1}{z}$ و $\frac{d\theta}{dt} = hz^2$ و $\frac{d^2r}{dt^2} = -h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}$ بهذه الصورة :

$$-h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2} - \frac{1}{z}h^2z^4 = -kz^2$$

أو

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}$$

الجواب العام لهذه المعادلة التفاضلية هو :

$$z = A\sin\theta + B\cos\theta + \frac{k}{h^2}$$

نفرض الإحداثي القطبي في وضعية إذا كانت $\theta = 0$ يكون r قيمته أقل قيمة ممكنة أي أقل فاصلة بين m و M و هذا يستطلب أن تكون z ذات أعلى قيمة . لذلك في $\theta = 0$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} < 0 \quad \text{و} \quad \frac{dz}{d\theta} = 0$$

من هذه الشروط نستنتج :

$A = 0$ و $B > 0$ بما أن $z = \frac{1}{r}$ تصبح $z = A\sin\theta + B\cos\theta + \frac{k}{h^2}$ بهذا الشكل :

$$r = \frac{1}{\frac{k}{h^2} + B\cos\theta} \Rightarrow r = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + (B\frac{h^2}{k})\cos\theta}$$

لوفرضنا $e = B\frac{h^2}{k}$ إذن :

$$r = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + e\cos\theta}$$

هذه معادلة قطع مخروطي في الأحداثيات القطبية ، الحالات :

$e < 1$ المعادلة إهليلج أو قطع ناقص(ellipse)

$e = 1$ المعادلة قطع مكافئ (parabola)

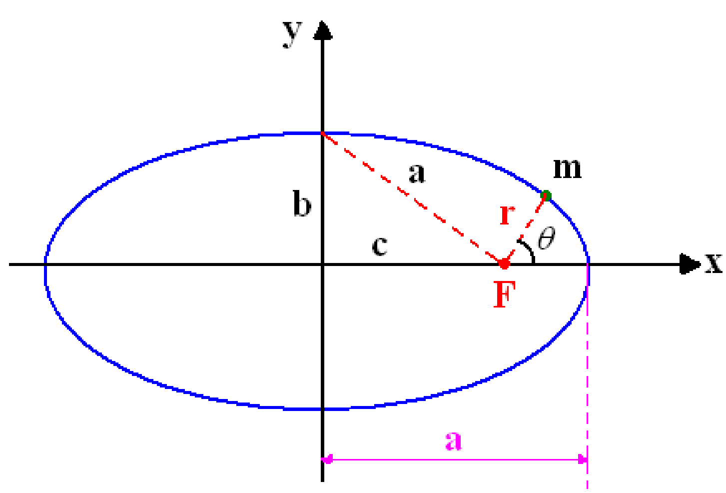
$e > 1$ المعادلة هذلولي أو قطع زائد (hyperbola)

$e = 0$ المعادلة دائرة

بما أن حركة الكواكب حول الشمس تبقى في مسير ثابت إذن مسير هذه المعادلة هو مسير إهليلجي ، و الشمس في أحد بوئرتيه ، و هو القانون الأول لكبلر .

الدورة الزمنية لدوران الكواكب

المعادلة القطبيه للإهليلج هي $r = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + e\cos\theta}$ و معادلة الإهليلج في الإحداثيات الكارتيزية هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ و كما نعلم من الهندسة التحليلية $e = \frac{c}{a}$ و كذلك $c^2 = b^2 - a^2$ لذلك $e = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$ و $b^2 = a^2(1 - e^2)$



a متوسط فاصلة m الى البوئرة F و تساوي نصف مجموع أكبر و أصغر قيمة r

لذلك من الرابطة $r=\dfrac{\frac{h^2}{k}}{1+e\cos\theta}$ و الرابطة $b^2=a^2(1-e^2)$ نحصل على :

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h^2}{k}}{1+e}+\frac{\frac{h^2}{k}}{1-e}\right)=\frac{h^2}{k(1-e^2)}=\frac{h^2a^2}{kb^2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(0)=1\\ \cos(180^\circ)=-1\end{gathered}}$$

ومنها :

$$b^2=\frac{h^2a}{k}$$

لو فرضنا الدورة الزمنية اللازمة لدوران m دورة واحدة في مدارها تساوي T ، و بما أن مساحة الإهليلج تساوي πab و إستناداً على المعادلة $A(t_1)-A(t_2)=\frac{1}{2}h(t_2-t_1)$ إذن : $\pi ab=\dfrac{hT}{2}$

لو وضعنا $b^2=\dfrac{h^2a}{k}$ في الرابطة $\pi ab=\dfrac{hT}{2}$ نحصل على :

$$\pi^2a^2\frac{h^2a}{k}=\frac{h^2T^2}{4}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2a^2b^2}{h^2}\Rightarrow T^2=\left(\frac{4\pi^2}{k}\right)a^3$$

يرتبط الثابت $k=GM$ بالكتلة M و لا يرتبط بالكتلة m ، لذلك هذا القانون $T^2=\left(\dfrac{4\pi^2}{k}\right)a^3$ يصدق لجميع كواكب المنظومة الشمسية و هو القانون الثالث لكبلر .

مربع الدورة الزمنية (سنة كوكبية) لدوران كوكب حول الشمس متناسبة مع مكعب نصف المحور الأعظم لمدار ذلك الكوكب حول الشمس .

إستنتاج قوانين الحركة من ميكانيك لاغرانج

جسم كتلته m متأثراً بقوة الثقالة قيمتها $\frac{km}{r^2}$ و جهتها نحو مبدأ الإحداثي القطبي r و θ (في الصفحة) الطاقة الحركية و الكامنة لهذا الجسم :

الطاقة الحركية : $T = \frac{m}{2}[(\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\theta}{dt})^2]$ لاحظ رابطة السرعة في الصفحة الثالثة

الطاقة الكامنة : $V = \frac{-km}{r}$

لاغرانج هذه الطاقة : $L = T - V = \frac{m}{2}[(\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\theta}{dt})^2] + \frac{km}{r}$

معادلات لاغراج :

نفرض $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$ و $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ و منها

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{km}{r}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad \text{I}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{II}$$

بما أن L مستقلة عن θ يتضح من المعادلة II أن الرابطة $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$ لها قيمة ثابتة تساوي h نفرض هذه القيمة موجبة ، إذن :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$$

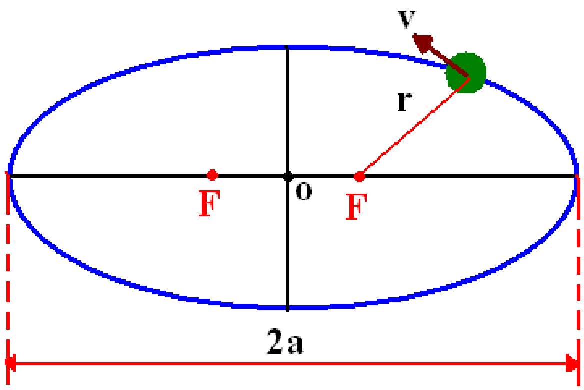
من المعادلة I نستنتج :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r^2}$$

هذه المعادلات التي إستنتجناها من معادلة لاغرانج شبيهة للمعادلات التي إستنتجناها في الصفحة الثالثة و الرابعة من قوانين نيوتن[1] .

1- لمطالعة أستنتاج مدار الكواكب أستناداً على نظرية النسبية العامة يمكن مراجعة فصل مدار الكواكب من كتابي نظرية النسبية العامة لأنشتاين الموجود على الموقع .

سرعة الكواكب و الأقمار في مداراتها



تحسب سرعة الكواكب و الأقمار في مداراتها من هذه الرابطة :

$$v^2 = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$$

- في هذه الرابطة $\mu = GM$
- a طول نصف المحور الأعظم للمدار
- r فاصلة الكوكب في كل نقطة من المدار الى البوئرة focus (أو الشمس)

نفرض m كتلة الكوكب أو القمر ، مجموع الطاقة الحركية و الكامنة لهذا الكوكب في مداره هي :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GMm}{r}$$

لأي مدار دائري أو إهليلجي كل الطاقة تساوي :

$$E = \frac{-GMm}{2a}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GMm}{r} = \frac{-GMm}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r} + \frac{-GMm}{2a}$$

إذن :

$$v^2 = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$$

تعرف هذه المعادلة بمعادلة Vis-viva equation

الصيغة العامة لمعادلة لاغرانج[1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(K.E.)-\frac{\partial}{\partial q_i}(K.E.)+\frac{\partial}{\partial q_i}(K.P.)+\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(D.E.)=Q_i$$

K.E الطاقة الحركية

P.E الطاقة الكامنه (Potential energy)

D.E الطاقة المستهلكة ، مثلاً مقاومة النابظ

Q_i القوى الخارجية

q_i الأحداثيات العامة المستعملة الى i

دالة لاغرانج :

$$L = K.E. + P.E$$

في هذه الدالة الطاقه الحركيه هي مثل :

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \quad و \quad \frac{1}{2}mv^2$$

و الطاقه الكامنه هي مثل :

$$mgx \quad و \quad \frac{1}{2}kx^2$$

معادلة لاغرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

1- لمزيد من المعلومات راجع موضوع حساب التغيرات و ميكانيك لاغرانج الموجود على الموقع

مسئلة الثلاثة أجسام

تعتبر المسابقة التي وضعها ملك السويد (و النرويج) أوسكار الثاني (Oscar II) عام 1887 بمناسبة ميلاده الستون ، بإقتراح عالم الرياضيات السويدي (Gosta Mitt) من المسابقات المهمة في تاريخ العلم و الرياضيات خاصة ، حيث أدت هذه المسابقة الى ظهور نظرية جديدة تعرف اليوم بنظرية الشواش أو الفوضى (Chaos theory) .

المسابقة كانت حول تعادل المنظومة الشمسية طبق قوانين نيوتن ، و السؤال هو الوصول الى معادلات تعادل ثلاثة أجسام (كالأرض و الشمس و القمر) متأثرة بقوى الثقالة فيما بينها فقط ، من ثم حل هذه المعادلات .

المسئلة بالنسبة لجسمين (كالأرض و الشمس) تعرف بمسئلة الجسمين (two-body problem) بسيطة و يمكن حلها و هذا ما أدينا جزء منها في الصفحات السابقة . لكن إذا تعدت هذه المسئلة الى ثلاثة أجسام ، تصبح من المسائل الصعبة و لا يمكن حلها بالطرق التحليلية ، و تعرف هذه المسئلة ، بمسئلة الثلاثة أجسام (Three-body problem)

أصبحت جائزة المسابقة من نصيب الفرنسي هنري بوانكاريه (Henri Poincare) ، لم يتمكن بوانكاري من حل المسئلة ، لكنه أستطاع أن يبرهن على إن المنظومة المتكونة من ثلاثة أجسام هي منظومة مظطربة و غير منتظمة ، و لا يمكن التنبأ بحركة هذه الأجسام في مسير حركتها ، و كهذه المنظومات الغير متعادلة هي غير منتظمة . أدى إستدلال بوانكاريه على لا نظامية هذه المنظومة الى ظهور نظرية الفوضى .

تمّ حلّ مسئلة الثلاثة أجسام من قبل الفلندي كارل سوندمان (Karl F. Sundman) عام 1912 ، و حلّ الحالة العامة لهذه المسئلة لحالة $n > 3$ ، التي تعرف بأسم مسئلة ال n جسم (n-body problem) من قبل (Qiudong Wang) عام 1990 .

بعض روابط مسئلة الجسمين

مسئلة الجسمين من مسائل الميكانيك الكلاسيكي و هي عبارة عن تعين معادلة حركة دوران جسمين حول بعضهما بعيداً عن تأثير القوى الأخرى . المسئلة التي بحثناها في الصفحات السابقة كانت لجسمين بحيث أحد الجسمين ثابت و الآخر يدور حوله كما هو الحال مع دوران كل من كواكب المنظومة الشمسية حول الشمس . لكن مسئلة الجسمين هي دوران جسمين حول مركز كتلة هذين الجسمين و هي أعقد من تلك الحالة التي بحثناها و إذا تعدى عدد الأجسام الى ثلاثة أجسام تعرف هذه الحالة بمسئلة الثلاثة أجسام و لا يمكن حل هذه الحالة بالطرق التحليلية ، أي لا يمكن حلّ معادلة حركة هذه الأجسام ، و تترقى هذه المسئلة لتصبح مسئلة ال n جسم .

r متجهة احد الجسمين بالنسبة الى الآخر

$\mu = G(m_1 + m_2)$ المعمل المعياري للثقالة (m_1 و m_2 كتلة كل من الجسمين و G ثابت الجذب العام)

متجهة مركز الكتلة تحسب من هذه الرابطة

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

للمدار الدائري :

$$ma = F \Rightarrow mr\omega^2 = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow r\omega^2 = G\frac{M}{r^2} \Rightarrow r\omega^2 = \frac{\mu}{r^2} \Rightarrow r^3\omega^2 = \mu$$

إذن :

$$r^3 \frac{4\pi^2}{T^2} = \mu$$

سرعة الجسم الدوار

$$r^3 \frac{4\pi^2}{T^2} = \mu \Rightarrow r^2 \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\mu}{r} \Rightarrow (\frac{2\pi r}{T})^2 = \frac{\mu}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

هنا r يساوي فاصلة الجسم الدوار الى مركز الكتلة .

للمدار الإهليلجي :

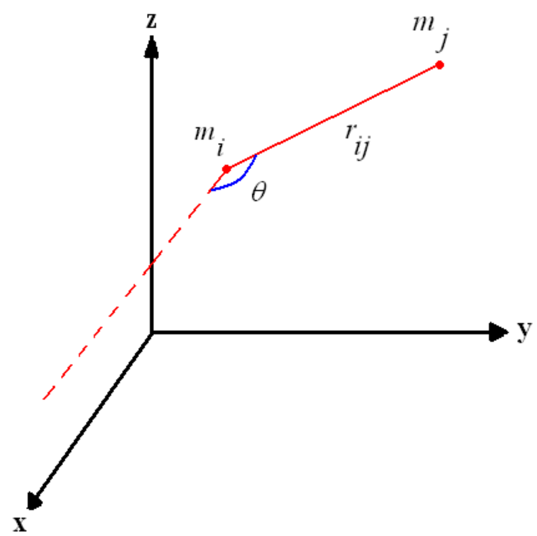
$$a^3 \frac{4\pi^2}{T^2} = \mu$$

و السرعة يمكن محاسبتها من هذه الرابطة :

$$v^2 = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$$

مسئلة ال N جسم

لو فرضنا n جسم كتلة كل من هذه ال n جسم هو m_i و موضع كل جسم (x_i, y_i, z_i)، تجذب هذه الأجسام بعضها البعض وفق قانون الجذب العام لنيوتن ، إذا كان r_{ij} الفاصلة بين كل جسمين و الزاوية بين الجهة الموجبة لمحور x مع الخط الواصل بين هاذين الجسمين هي θ .



القوة الناتجة من m_j على m_i في جهة x هي :

$$\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2}\cos\theta = \frac{Gm_i m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3}$$

G ثابت الجذب العام لنيوتن ، مجموع القوى الى $j \neq i$ يساوي $m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}$ ، في هذه الحالة توجد n معادلة تفاضلية رتبة ثانية بهذا الشكل :

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = G\sum_{j \neq i} \frac{m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3}$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = G\sum_{j \neq i} \frac{m_j (y_j - y_i)}{r_{ij}^3}$$

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} = G\sum_{j \neq i} \frac{m_j (z_j - z_i)}{r_{ij}^3}$$

لو كتبنا هذه المتغيرات بهذا الشكل :

$$v_{x_i} = \frac{dx_i}{dt}$$
$$v_{y_i} = \frac{dy_i}{dt}$$
$$v_{z_i} = \frac{dz_i}{dt}$$

في هذه الحالة سنحصل على منظومة $6n$ معادلة تفاضليه $(i = 1,2,3,\cdots,n)$ ، المجاهيل فيها هي :

$$(v_{x_n}, x_n),\cdots,(v_{x_1}, x_1)$$
$$(v_{y_n}, y_n),\cdots,(v_{y_1}, y_1)$$
$$(v_{z_n}, z_n),\cdots,(v_{z_1}, z_1)$$

x_1 موضع الجسم 1 و v_{x_1} سرعته و هكذا لبقية الأجسام .

كذلك من قانون الفاصلة في الفضاء :

$$r_{ij}^3 = \sqrt{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^3}$$

في حال إذا كانت السرعة البدائية و الموضع البدائي لهذه الأجسام معلوم أي المجاهيل في الزمن البدائي $t = t_o$ معلومة ، و هذه الأجسام لا تتصادم أي $r_{ij}^3 \neq 0$ ، يمكن تعين سرعة و موضع الأجسام في اللحظات القادمة .

من خلال هذه المنظومة المعادلاتية يمكن حلّ (أو تعين مسير) مسئلة الجسمين ، أو الثلاثة أجسام أو أي عدد آخر من الأجسام بطرق عددية و من خلال الحاسوب ، كما في الصفحات الأخيرة .

المعادلات لثلاثة أجسام في الفضاء

لثلاثة أجسام $i=1,2,3$ في الفضاء الأحداثيات (x,y,z) عدد المعادلات 18 معادلة:

$$\begin{cases} v_{x_1}=\dfrac{dx_1}{dt} \\ v_{y_1}=\dfrac{dy_1}{dt} \\ v_{z_1}=\dfrac{dz_1}{dt} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_{x_1}=G\dfrac{m_2(x_2-x_1)}{r_{12}^3}+G\dfrac{m_3(x_3-x_1)}{r_{13}^3} \\ v'_{y_1}=G\dfrac{m_2(y_2-y_1)}{r_{12}^3}+G\dfrac{m_3(y_3-y_1)}{r_{13}^3} \\ v'_{z_1}=G\dfrac{m_2(z_2-z_1)}{r_{12}^3}+G\dfrac{m_3(z_3-z_1)}{r_{13}^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{x_2}=\dfrac{dx_2}{dt} \\ v_{y_2}=\dfrac{dy_2}{dt} \\ v_{z_2}=\dfrac{dz_2}{dt} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_{x_2}=G\dfrac{m_1(x_1-x_2)}{r_{21}^3}+G\dfrac{m_3(x_3-x_2)}{r_{23}^3} \\ v'_{y_2}=G\dfrac{m_1(y_1-y_2)}{r_{21}^3}+G\dfrac{m_3(y_3-y_2)}{r_{23}^3} \\ v'_{z_2}=G\dfrac{m_1(z_1-z_2)}{r_{21}^3}+G\dfrac{m_3(z_3-z_2)}{r_{23}^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{x_3}=\dfrac{dx_3}{dt} \\ v_{y_3}=\dfrac{dy_3}{dt} \\ v_{z_3}=\dfrac{dz_3}{dt} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_{x_3}=G\dfrac{m_1(x_1-x_3)}{r_{31}^3}+G\dfrac{m_2(x_2-x_3)}{r_{32}^3} \\ v'_{y_3}=G\dfrac{m_1(y_1-y_3)}{r_{31}^3}+G\dfrac{m_2(y_2-y_3)}{r_{32}^3} \\ v'_{z_3}=G\dfrac{m_1(z_1-z_3)}{r_{31}^3}+G\dfrac{m_2(z_2-z_3)}{r_{32}^3} \end{cases}$$

لا يمكن حلّ هذه المعادلات بطرق تحليلية ، لكن إذا كانت الشرائط البدائية في زمن $t=t_\circ$ معلومة يمكن حل هذه الثمانية عشر معادلة بطرق عددية بالحاسوب . إذا كانت الحركة في الصفحة جميع معامل z صفر أي $z=0$.

تعتبر هذه النتيجة (ال $6n$ معادلة تفاضلية) من أساسيات فلسفة الجبر الميكانيكي ، التي تنظر للكون كجثة عظيمة مستقبله مرهون شرائطه الزمنية في (زمن) الحاضر . إستناداً على هذا التفكر أدعى جيمس جينس (James Jeans) على إن الكون عبارة عن منظومة مكونة من $6N$ معادلة تفاضلية ، فيها N عدد أدينغتون (Arthur Stanley Eddinton) و الذي هو كذلك أدعى على أن عدد البروتونات الموجودة في الكون هو :

$$N_{Edd} = 136 \times 2^{256} = 1.575 \times 10^{79}$$

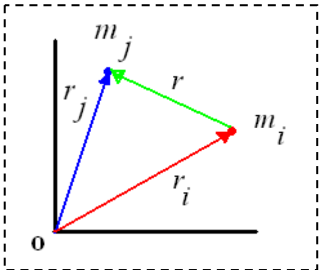
كذلك يوجد بعدد البروتونات ، إلكترونات .

في عدد أدينغتون العدد 136 من $\alpha = \dfrac{1}{136}$ (Fine-structure constant)

الطريقة العددية لحل مسئلة ال N جسم

كما أشرنا سابقاً لا يمكن حلّ مسئلة N جسم بطرق تحليلية إذا كانت $N \geq 3$ ، و يمكن حلها بطرق عددية . في هذا الفصل سنوضح الطريقة العددية .

نفرض m_i كتلة الجسم i و r_i فاصلة الجسم m_i (مثلاً الى مركز الإحداثي) ، تعجيل الجسم m_i يساوي :



$$a_i = \frac{d^2 r_i}{dt^2} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} m_j \frac{r_i - r_j}{\left| r_i - r_j \right|^3}$$

إذا كانت الشرائط البدائية معلومة للوضعية r_i و للسرعة v_i في لحظة البداية ، يمكن تعين الوضعية و السرعة في فاصلة زمنية قادمة (فاصلة زمنية قصيرة جداً Δt)

$$a_i(t) = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} m_j \frac{r_i - r_j}{\left| r_i - r_j \right|^3}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_\circ + \vec{v}_\circ \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_\circ \Delta t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_\circ + \vec{a}_\circ \Delta t$$

$$v_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = v_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + a_i(t) \Delta t$$

$$r_i(t + \Delta t) = r_i(t) + v_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

طريقة أخرى

$$F_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} m_j \frac{r_i - r_j}{\left| r_i - r_j \right|^3}$$

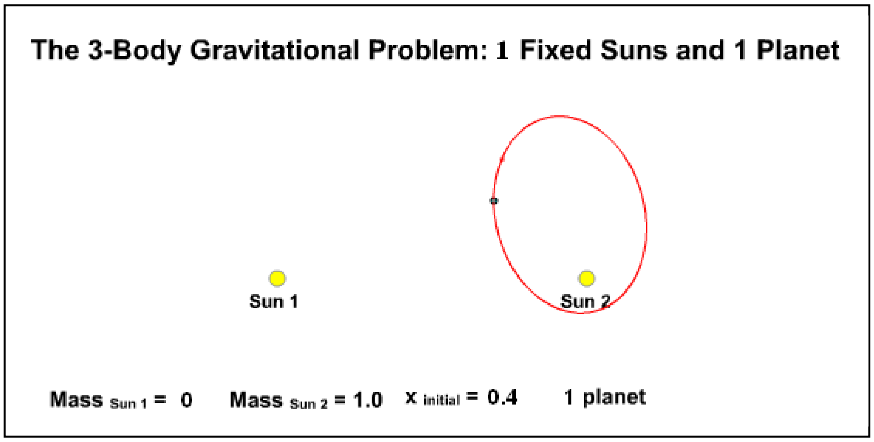
هنا F_i القوة لكتلة الوحدة للجسم i ، يمكن هنا كذلك فرض $G = 1$ ، الزمن البدائي $t_\circ$.

$$v_i(t) = F_i \Delta t + v_i(t_\circ)$$

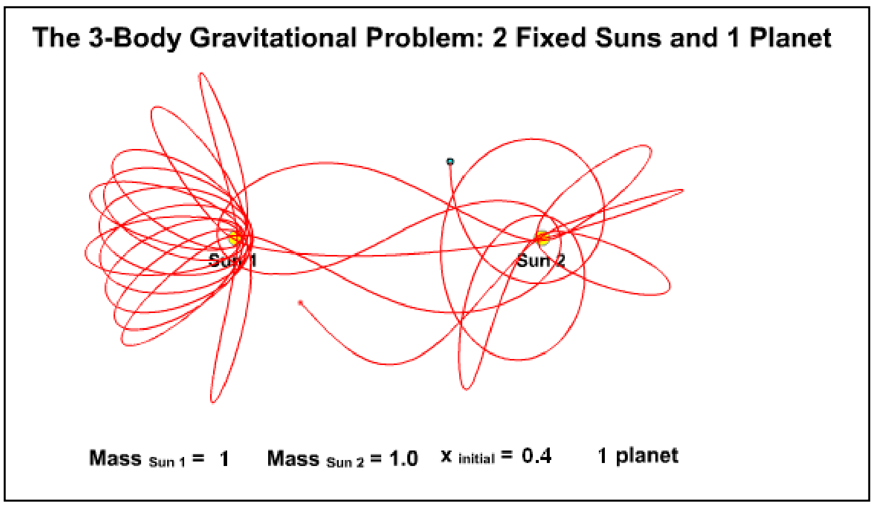
$$r_i(t) = \frac{1}{2} F_i \Delta t^2 + v_i(t_\circ) \Delta t + r_i(t_\circ)$$

بعض نماذج من حركة الأجسام حول جسم آخر

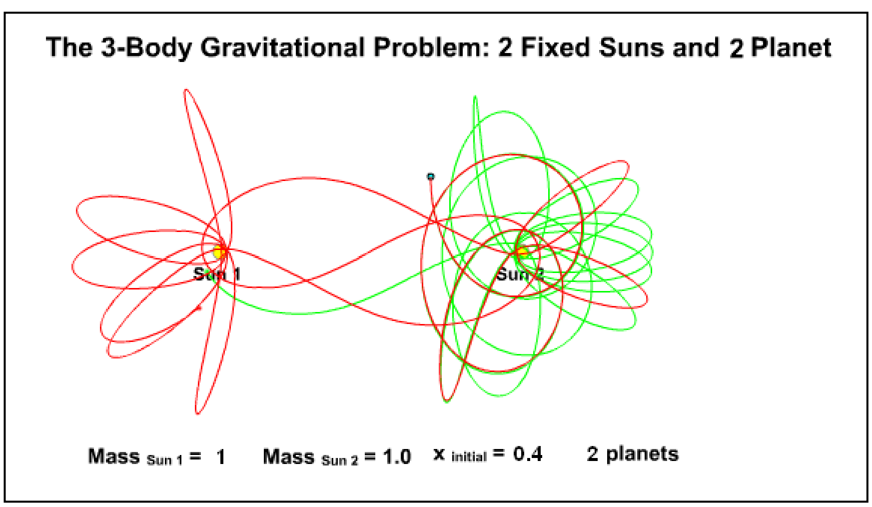
كتلة كبيرة ثابتة واحدة و
كوكب واحد يدور حولها

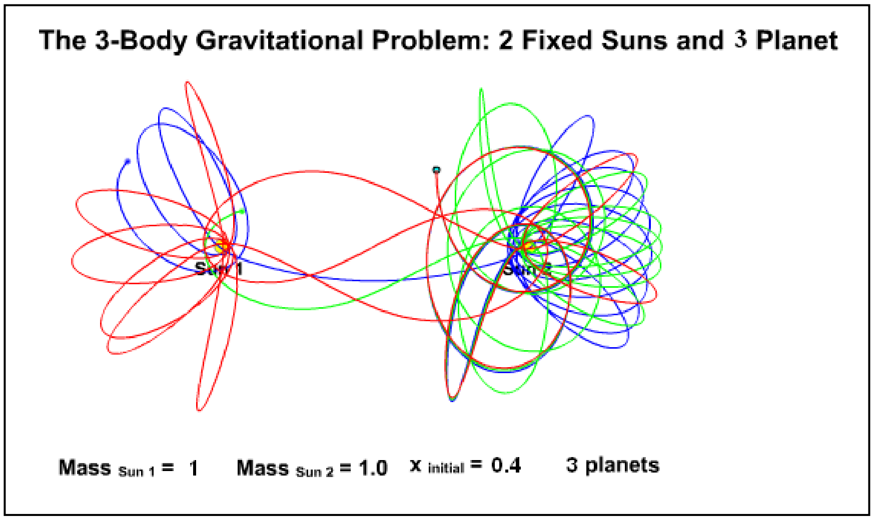


كتلتان كبيرتان ثابتتان و
كوكب واحد يدور حولهما

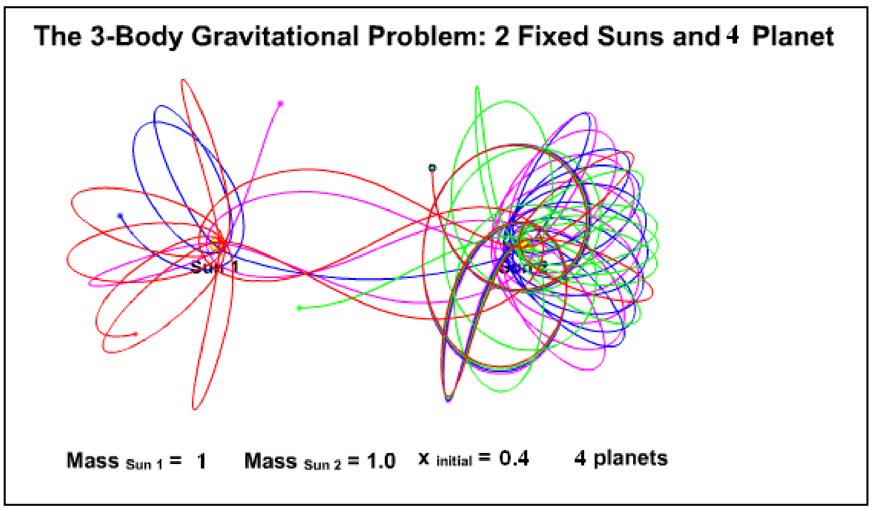


كتلتان كبيرتان ثابتتان و
كوكبان يدوران حولهما





كتلتان كبيرتان ثابتتان و
ثلاثة كواكب تدور حولهما



كتلتان كبيرتان ثابتتان و
أربعة كواكب تدور حولهما

المصادر

- Poincare and The Three Body Problem, Jone Barrow-Green
- Differential Equations with Applications and Historical Notes, Gorge F. Simmons, McGraw-Hill Inc., 1972
- Gravitational N-body simulations, by Sverre Johannes Aarseth

- http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/Chaos/ThreeBody/ThreeBody.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_two-body_problem
- http://en.wikipedia.org/wiki/Vis-viva_equation

جلال الحاج عبد

2009-7-1

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com