بســـم الله الرحـــمن الرحـــيم

تقريب المتتاليات و المتسلسلات العددية

توجد طرق و روابط لتعين مجموع بعض المتتاليات و المتسلسلات و لا توجد طريقة أو رابطة عامة يمكن من خلالها تعين قيمة مجموع المتتاليات العددية لأي عدد و لا نهاية مجموع المتسلسلات . يعتمد هذا البحث على رابطة تقريبية إستنتجتها و كنت أعتمد عليها لتعين القيمة التقريبية لمجموع المتتاليات و نهاية مجموع المتسلسلات ، هي رابطة تقريبية لا يمكن الإعتماد عليها لتعين القيّم الواقعية لمجموع المتتاليات و المتسلسلات لكن يمكن الإستناد عليها لتعين رابطة أو قيمة تقريبية لمجموع المتتاليات و المتسلسلات العددية ، تساعد على تحديد مجموع المتتاليات و أحياناً تعطي قيمة قريبة جداً من القيمة الواقعية ، كذلك بعض المتتاليات و المتسلسلات العددية المعقدة لا يمكن تعين مجموعها لكن الرابطة أو القيمة التقريبية التي تعطيها هذه الرابطة يمكن الإكتفاء بها أحياناً . لا ننسى بأن مجموع جميع المتتاليات يمكن تعينها بمساعدة الحاسوب و بدقة متناهية ، و هذه الطريقة العددية التقريبية يمكن إضافتها الى المهارات التقريبية الأخرى[1] التي نستخدمها في حياتنا اليومية.

1- مواضيع حول القيّم التقريبية يمكن مراجعتها على الروابط التالية :

الحلول التقريبية : http://www.jalalalhajabed.com/rule-of-thumb.pdf

المتباينات الجبريه و الهندسية : http://www.jalalalhajabed.com/Inequality.pdf

يجب عدم الخلط بين القيّم المتساوية و القيّم التقريبية ، و مهما كانت درجة التقريب فهي لا ترتقي الى التساوي لكن في الحياة العملية نكتفي بالقيّم التقريبية ، و أحياناً في المواضيع النظرية كذلك نكتفي ببعض الروابط و القيّم التقريبية . يمكن ملاحظة مفهوم التساوي و التقريب في هذا المثال :

$$\frac{1}{11}=0.09090909\cdots$$

$$\frac{10}{11}=0.9090909\cdots$$

مجموع هذين التساويين

$$\frac{1}{11}+\frac{10}{11}=1=0.09090909\cdots+0.9090909\cdots\Rightarrow 1=0.9999999\cdots$$

هذه الأشكالية $1=0.9999999\cdots$ ناتجة من إستعمال علامة التساوي مكان علامة التقريب، و لرفع الإشكالية هذه يجب إستعمال علامة التقريب بهذه الصورة :

$$\frac{1}{11}\approx 0.09090909\cdots$$

$$\frac{10}{11}\approx 0.9090909\cdots$$

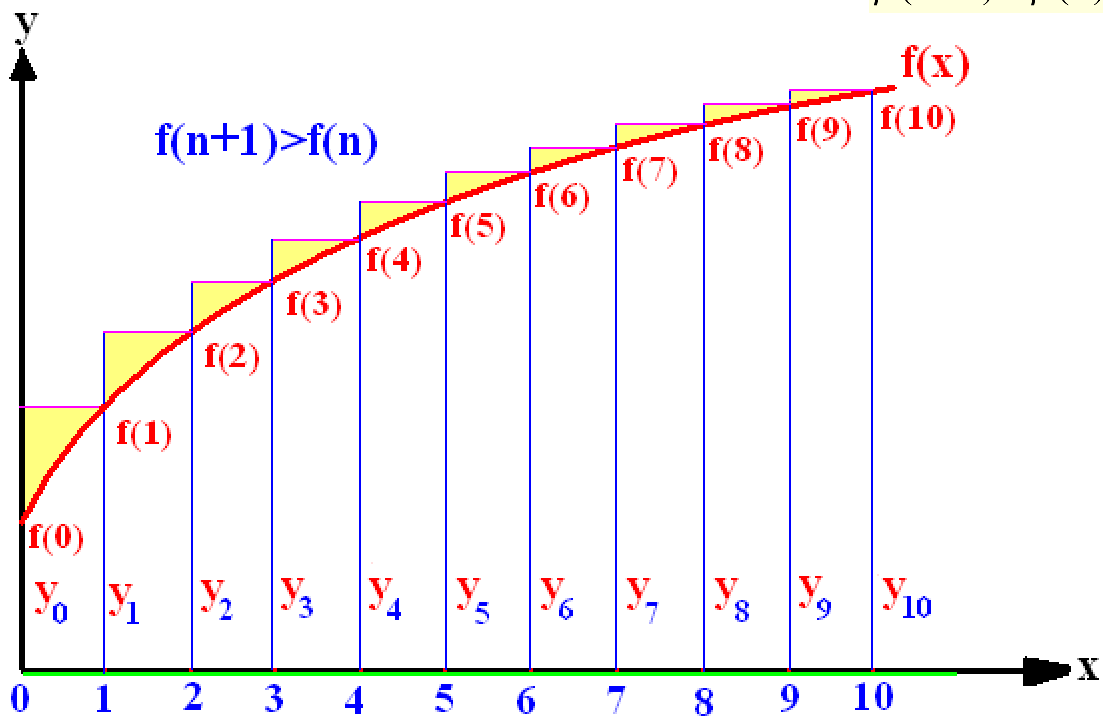
$$\frac{1}{11}+\frac{10}{11}=1\approx 0.09090909\cdots+0.9090909\cdots\Rightarrow 1\approx 0.9999999\cdots$$

إذن $1\approx 0.9999999\cdots$

الهدف من المقال هذا هو تعين قيمة تقريبية لمجموع المتتاليات أو نهايتها أو القيمة التقريبية لمضروب الأعداد ، قيمة يجب عدم الوقوف عندها و إنما عند حدودها و أبعادها.

المجموع بهذه الصيغة $\sum_{i=0}^{n} f(i)$ و المضروب بهذه الصيغة $\prod_{i=0}^{n} f(i)$ في هذه الروابط الدالة $f(i)$ هي الدالة التي تتولد منها جمل المتتاليات أو المتسلسلات ، الحالات الممكنة التي تأخذها هذه الدالة هي :

في حالة $f(n+1) > f(n)$



مجموع المتتالية يساوي مجموع مساحة المستطيلات ، و مساحة كل مستطيل تساوي الطول في القاعدة و القاعدة هنا تساوي واحد و هي كذلك تساوي المساحة تحت المنحني زائد مساحة المثلث .

المساحة تحت المنحني تساوي : $\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$

مساحة كل مثلث قائم الزاوية : $\frac{1}{2}[y_n - y_{n-1}]$

مساحة كل مستطيل تساوي : $1 \times f(n)$

مجموع مساحة المستطيلات : $S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

كذلك مجموع مساحة المستطيلات يساوي :

$$S = \int_0^n f(x)dx + \left[\frac{1}{2}(y_1 - y_0) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) + \cdots + \frac{1}{2}(y_n - y_{n-1})\right]$$

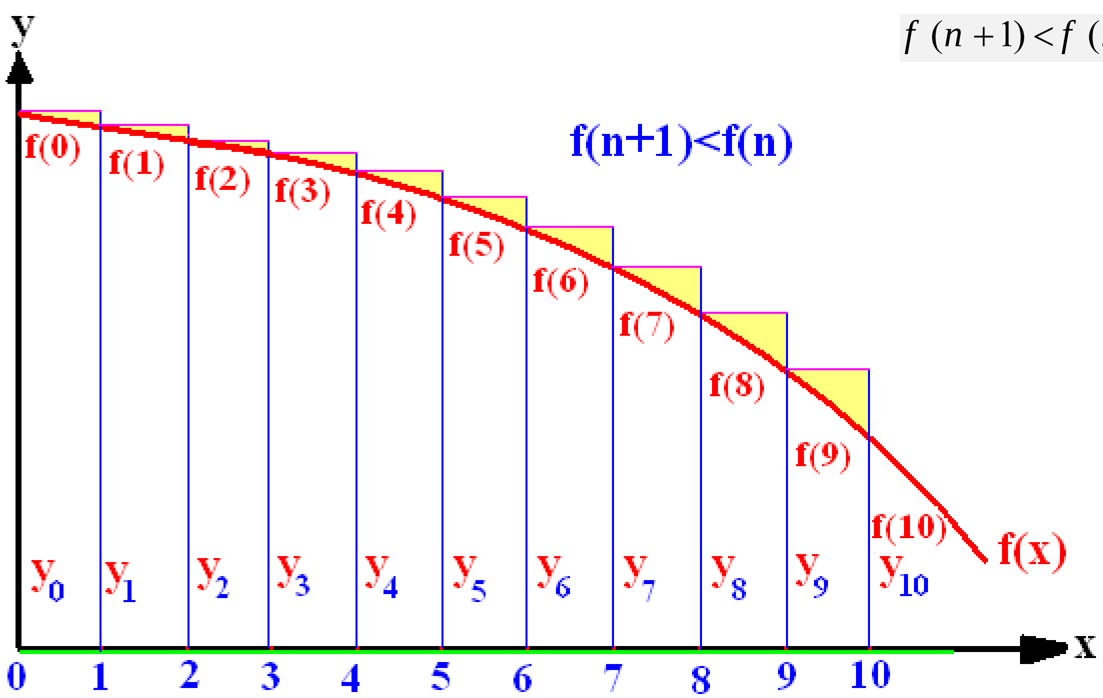
إذن :

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \int_0^n f(x)dx + \left[\frac{1}{2}(y_1 - y_0) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) + + \cdots + \frac{1}{2}(y_n - y_{n-1})\right]$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \approx \int_0^n f(x)dx + \frac{f(n) - f(0)}{2}$$

يجب البحث في الدالة التي تتولد منها المتتالية ، يجب أن تكون الدالة في محدودة الأعداد التي تولد المتتالية دالة مستمرة .

في حالة $f(n+1) < f(n)$



$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \approx \int_0^n f(x)dx + \frac{f(0) - f(n)}{2}$$

الحالة العامة للقانونين

في حالة نقطة البداية ليست مبدأ الإحداثي و إنما تبدأ المتتالية أو المتسلسلة من النقطة $x_0 = \alpha$

$$\sum_{i=\alpha}^{n} f(i) \approx \int_\alpha^n f(x)dx + \frac{f(n) - f(\alpha)}{2}$$

$$\sum_{i=\alpha}^{n} f(i) \approx \int_\alpha^n f(x)dx + \frac{f(\alpha) - f(n)}{2}$$

مثال : مجموع الأعداد الطبيعيه

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2++\cdots+n$$

الدالة $f(x)=x$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \approx \int_{0}^{n} f(x)dx + \frac{f(n)-f(0)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i \approx \int_{0}^{n} xdx + \frac{n-0}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i \approx \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{2}$$

$$1+2++\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال : القيمة التقريبية لهذه المتتالية :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ و $x>0$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \approx \int_{0}^{n} f(x)dx + \frac{f(0)-f(n)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \int_{1}^{n} \frac{1}{x}dx + \frac{1-\frac{1}{n}}{2} = \ln n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = \ln n + \ln e^{\frac{1}{2}} + \ln e^{-\frac{1}{2n}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \ln(n \times e^{\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{2n}}) = \ln(n \times e^{\frac{n-1}{2n}})$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \approx \ln(n \times \sqrt[2n]{e^{n-1}})$$

مثال : القيمة التقريبية لمضروب الأعداد الطبيعية :

$n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$

$\ln(1\times 2\times 3\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$

ننتخب الدالة : $f(x) = \ln x$ و $x > 0$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \approx \int_0^n f(x)dx + \frac{f(n)-f(0)}{2}$$

$$\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n \approx \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n - \ln 1}{2} = n\ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2}$$

$$\int_1^n \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_1^n = n\ln n - n + 1$$

$$\ln n! \approx n\ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} = \ln n^n + \ln n^{\frac{1}{2}} + \ln e^{1-n} = \ln(n^n n^{\frac{1}{2}} e^{1-n})$$

$$\ln n! \approx \ln(n^n n^{\frac{1}{2}} e^{1-n}) \Rightarrow \quad n! \approx n^n \times \sqrt{n} \times e^{1-n}$$

$f(n+1) > f(n)$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \approx \int_0^n f(x)dx + \frac{f(n)-f(0)}{2}$$

$f(n+1) < f(n)$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \approx \int_0^n f(x)dx + \frac{f(0)-f(n)}{2}$$

في حالة نقطة البداية ليست مبدأ الإحداثي و إنما تبدأ المتتالية أو المتسلسلة من النقطة $x_0 = \alpha$

$$\sum_{i=\alpha}^{n} f(i) \approx \int_\alpha^n f(x)dx + \frac{f(n)-f(\alpha)}{2}$$

$$\sum_{i=\alpha}^{n} f(i) \approx \int_\alpha^n f(x)dx + \frac{f(\alpha)-f(n)}{2}$$

مثال : مجموع المتتالية

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$

$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \approx \int_0^n f(x)dx + \frac{f(n) - f(0)}{2}$$

الدالة $f(x) = 2^x$ و $x \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \approx \int_0^n 2^x dx + \frac{2^n - 2^0}{2} = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^n + \frac{2^n - 1}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \approx \frac{2^n}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + \frac{2^n}{2} - \frac{1}{2} = 2^n\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2}\right)$$

نفرض $\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2}\right) \approx 2$ إذن :

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \approx 2^{n+1} - 2$$

الحالة العامة المطلوب القيمة التقريبية للمجموع $a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n$

الدالة و تكاملها : $f(x) = a^x \Rightarrow \int_0^n a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}\Big|_0^n = \frac{a^n}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i \approx \int_0^n a^x dx + \frac{a^n - a^0}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i \approx \frac{a^n}{\ln a} - \frac{1}{\ln a} + \frac{a^n}{2} - \frac{1}{2} = a^n\left(\frac{1}{\ln a} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\ln a} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i \approx a^n\left(\frac{1}{\ln a} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\ln a} + \frac{1}{2}\right)$$

مثال : المطلوب نهاية المتسلسلة $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$

نكتب هذه المتسلسلة بهذه الصورة

$$(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n})$$

$$\approx(\int_1^n\frac{dx}{2x-1}+\frac{1-\frac{1}{2n-1}}{2})-(\int_1^n\frac{dx}{2x}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}{2})$$

$$=\left[\frac{1}{2}(\ln(2x-1)\Big|_1^n+\frac{1-\frac{1}{2n-1}}{2})\right]-\left[\frac{1}{2}(\ln(2x)\Big|_1^n+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}{2})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(2n-1)+1-\frac{1}{2n-1}-\ln n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right]$$

لمقادير n كبيرة جداً نفرض $2n-1\approx 2n$ إذن :

$$\approx\frac{1}{2}\left[\ln(2n)-\ln n+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\ln 2+\ln n-\ln n+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln 2+\frac{1}{2}\right]$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\approx\frac{1}{2}\left[\ln 2+\frac{1}{2}\right]$$

القيمة الحقيقية لهذه المتسلسة لعدد كثير من الجمل تساوي $\ln 2=0.693147180$ و

$$\ln 2+\frac{1}{2}=0.596573590$$

مثال : المطلوب القيمة النهائية للمتسلسلة $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$

الدالة $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}$ في هذه الدالة $f(1)>f(2)$ إذن :

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \approx \int_1^n f(x)dx + \frac{f(1)-f(n)}{2}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots \approx \int_1^n \frac{dx}{(2x-1)^2} + \frac{1-\frac{1}{(2n-1)^2}}{2}$$

$$\int_1^n \frac{dx}{(2x-1)^2} + \frac{1-\frac{1}{(2n-1)^2}}{2} = -\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n-1)^2}$$

عندما يصبح n عدد كبير جداً قيمة هذه الرابطة تساوي واحد إذن :

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots \approx 1$$

القيمة الواقعية لهذه المتسلسلة تساوي :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.2337$$

مثال : مطلوب قيمة المتتالية لأي قيمة من n $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}$

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} \approx \int_0^n \sqrt{x}\,dx + \frac{\sqrt{n}}{2}$$

$$\int_0^n \sqrt{x}\,dx + \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{n^3}+\frac{1}{2}\sqrt{n}$$

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} \approx \frac{2}{3}\sqrt{n^3}+\frac{1}{2}\sqrt{n}$$

مثال : مطلوب قيمة المتتالية لأي قيمة من n (n حسب الراديان)

$$\sin(0)+\sin(1)+\sin(2)+\sin(3)+\cdots+\sin(n)$$

$$\sin(0)+\sin(1)+\sin(2)+\sin(3)+\cdots+\sin(n)\approx\int_0^n \sin(x)dx+\frac{\sin(n)}{2}$$

$$\int_0^n \sin(x)dx+\frac{\sin(n)}{2}=-\cos(n)+1+\frac{1}{2}\sin(n)$$

$$\sin(0)+\sin(1)+\sin(2)+\sin(3)+\cdots+\sin(n)\approx-\cos(n)+\frac{1}{2}\sin(n)+1$$

مثال : المطلوب قيمة المتتالية لأي قيمة من n (في هذا المثال و سائر الأمثله n عدد صحيح موجب)

$$\frac{0}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}+\frac{4}{\sqrt[3]{5}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt[3]{1+n}}$$

القيمه التقريبية لمجموع هذه المتتالية :

$$\approx\int_0^n \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}dx+\frac{\frac{n}{\sqrt[3]{1+n}}-0}{2}$$

$$\approx\int_0^n \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}dx+\frac{\frac{n}{\sqrt[3]{1+n}}}{2}=\frac{3}{5}\sqrt[3]{(n+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(n+1)^2}+\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\frac{n}{\sqrt[3]{1+n}}$$

$$\frac{0}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}+\frac{4}{\sqrt[3]{5}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt[3]{1+n}}\approx\frac{3}{5}\sqrt[3]{(n+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(n+1)^2}+\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\frac{n}{\sqrt[3]{1+n}}$$

مثلاً $n=4$

$$\frac{0}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}+\frac{4}{\sqrt[3]{5}}=6.41$$

$$\frac{3}{5}\sqrt[3]{(4+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(4+1)^2}+\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt[3]{1+4}}=6.45$$

مثال : المطلوب القيمة التقريبية لهذا الضرب $1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times \cdots \times n^n$

$$\prod_{i=1}^{n} i^i = 1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times \cdots \times n^n \Rightarrow A = 1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times \cdots \times n^n$$

$$\ln A = 1 \times \ln 1 + 2 \times \ln 2 + 3 \times \ln 3 + \cdots + n \times \ln n$$

$$\ln A \approx \int_1^n x \ln x dx + \frac{n \ln n}{2} = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) \Big|_1^n + \frac{n}{2} \ln n$$

$$\ln A \approx \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \ln n$$

$$\ln A \approx (\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}) \ln n + \ln e^{(\frac{1-n^2}{4})} = \ln n^{(\frac{n^2+n}{2})} + \ln e^{(\frac{1-n^2}{4})}$$

$$\ln A \approx \ln[n^{(\frac{n^2+n}{2})} \times e^{(\frac{1-n^2}{4})}]$$

$$A \approx n^{(\frac{n^2+n}{2})} \times e^{(\frac{1-n^2}{4})}$$

$$1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times \cdots \times n^n \approx n^{(\frac{n^2+n}{2})} \times e^{(\frac{1-n^2}{4})}$$

يجب الإنتباه ، هذه الرابطة $n^{(\frac{n^2+n}{2})} \times e^{(\frac{1-n^2}{4})}$ هي تقريبية و القيمة التي تعطيها تختلف كثيراً عن القيمة الحقيقية لحاصل الضرب $1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times \cdots \times n^n$ ، كذلك تعطي هذه الرابطة عدد الإرقام في هذا الحاصل ضرب ،

جلال الحاج عبد

2011 - 3 – 6

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com