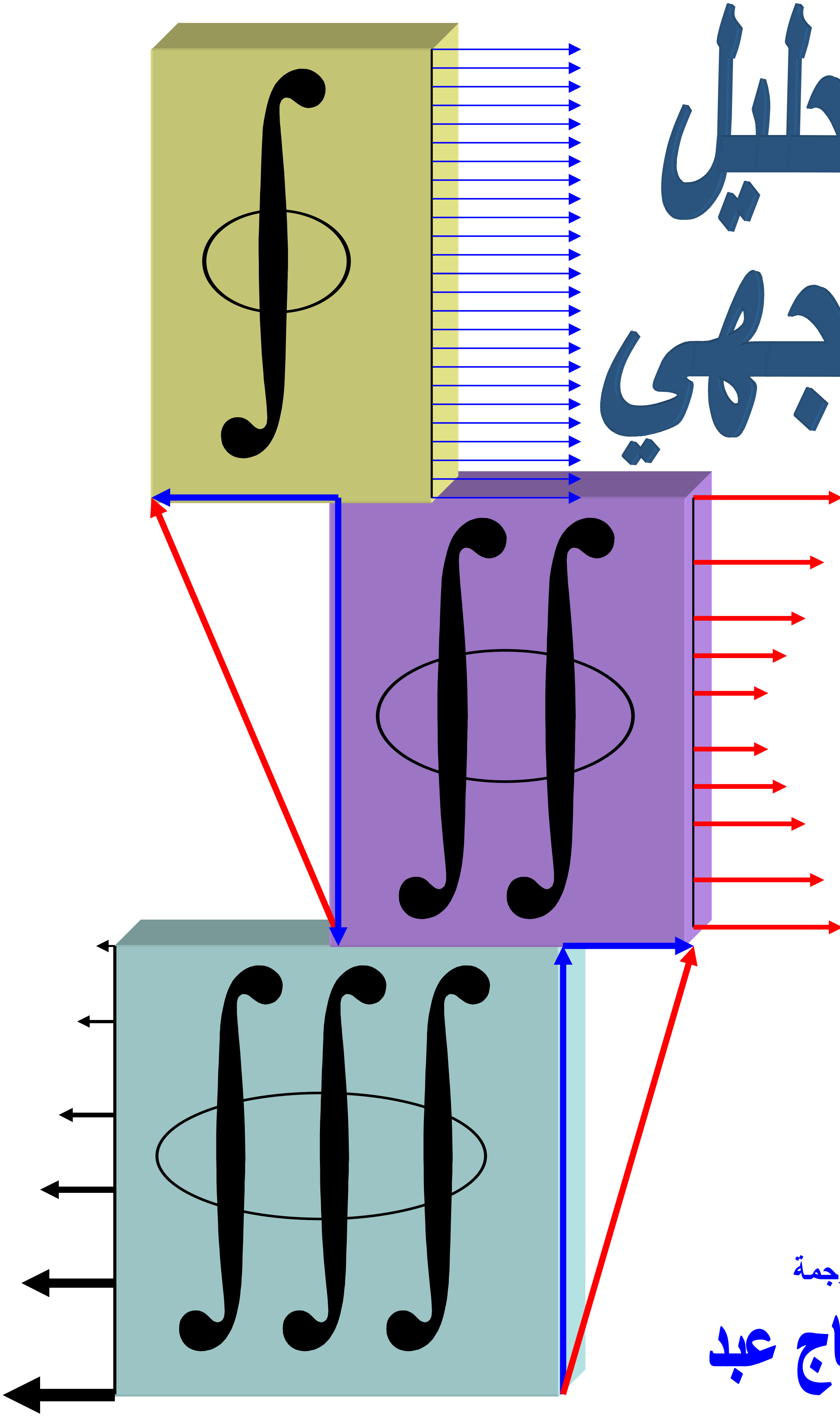
التحليل المتجهي



إعداد و ترجمة

جلال الحاج عبد

المقدمه

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله و الصلاة و السلام على محمد و على آله الطيبين الطاهرين .

تطلب دراسة الفيزياء و الهندسة و كذلك الرياضيات مهارة كافية في الحساب المتجهى[1] و كذلك التحليل المتجهي[2] ، و لما لهذه المواضيع من أهميه بالغه في هذه العلوم عمدت على تدوين و أعداد هذا البحث الذي هو بمثابة موسوعه في الحساب و التحليل المتجهي .

كان التحليل المتجهي من المواضيع الشيقة بالنسبة لي ، لأنه بنظري الحلقة التي تربط المفاهيم الرياضية بالقضايا و المسائل الفيزيائية و الهندسية . يلعب الحساب و التحليل المتجهي دوراً أساسياً في الميكانيك و ميكانيك الموائع ، و الحرارة ، و المغناطيس ، و الكهرباء ، و الألكترومغناطيس و هذا الدور يستطلب التعرف و التمرس بالمتجهة و مفاهيمها .

يشمل هذا البحث علاوة على الحساب و التحليل المتجهي بعض طرق التكاملات التي يعتمد عليها التحليل المتجهي ، كالتكامل الثنائي ، و الثلاثي ، و الخطي ، و السطحي .

بعض القوانين و القضايا بحاجة الى أمثله لفهمها و التعرف على متغيراتها و الدور الذي يلعبه كل متغير في القانون أو القضيه ، لذلك عمدت على دعمّ أكثر القوانين و القضايا بأمثله لسهولة فهمها .

جلال الحاج عبد

4.4.2008

1- vector calculus 2- vector analysis

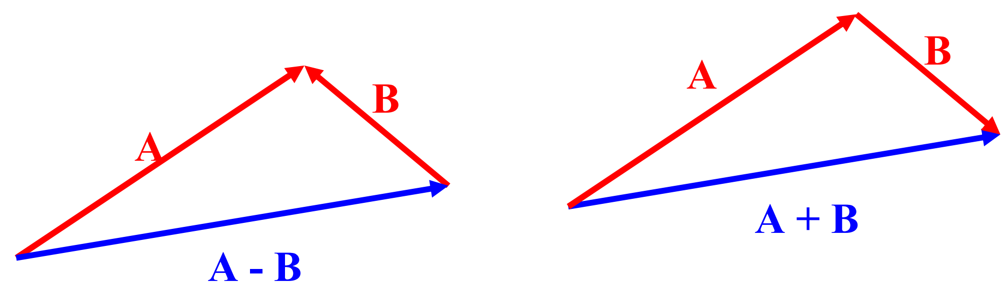
بعض قوانين المتجهات :

تكتب المتجة بأشكال مختلفه و أشهر الأشكال هي :

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

مجموع متجهتين :



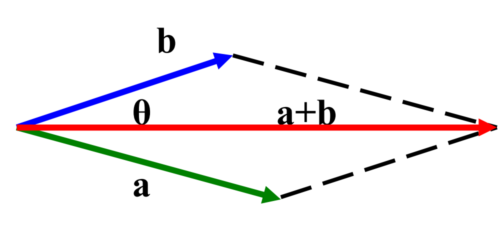
A + B = B + A

A + (B + C) = (A + B) + C

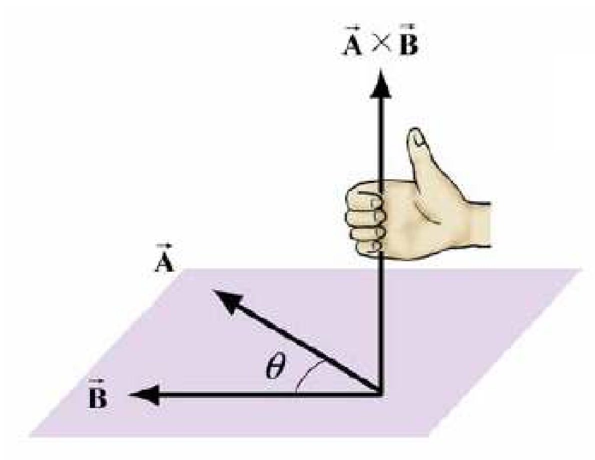
m(nA) = (mn)A = n(mA)

(m+n)A = mA + nA

m(A + B) = mA + mB

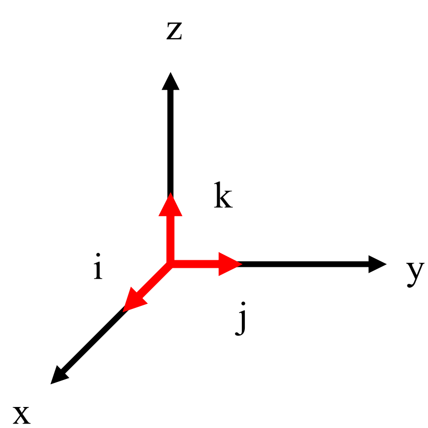


قانون اليد اليمنى :



المتجه الوحدة تساوي واحد ، و جهتها في جهة المتجه المخالفه للصفر $\vec{v}$ و تساوي

$$\hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$



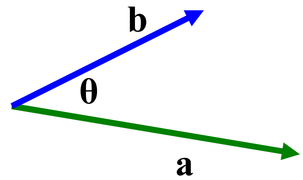
$\hat{k}=\hat{i}\times\hat{j}$ و $\hat{j}=\hat{k}\times\hat{i}$ و $\hat{i}=\hat{j}\times\hat{k}$ و $i\times i=0$ و $j\times j=0$ و $k\times k=0$

كذلك $i\cdot j=0$ و $i\cdot k=0$ و $j\cdot k=0$ و $i\cdot i=1$ و $j\cdot j=1$ و $k\cdot k=1$

إذا كانت a و b متجهتين و الزاويه بينهما θ في هذه الحالة :

- الضرب الداخلي لهذه المتجهتين هو :

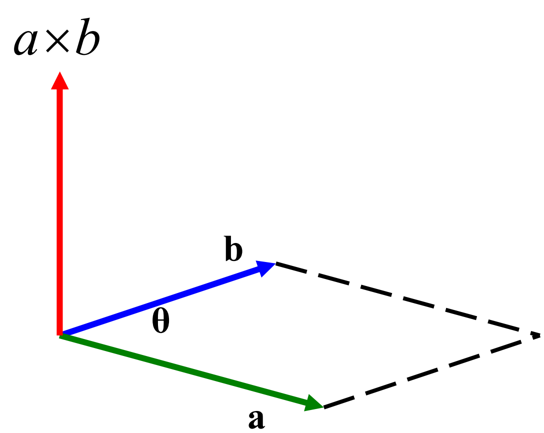
$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos\theta$$



$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

- الضرب الخارجي لهذه المتجهتين هو :

$$a = a_x + a_y + a_z \qquad \text{و} \qquad b = b_x + b_y + b_z$$



$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k$$

إذا كان A و B و C ثلا ث متجهات و المتغير فيها u
و ϕ سُلّميه ، قوانين التفاضل لهذه المتجهات هي :

$$\frac{d}{du}(A+B)=\frac{dA}{du}+\frac{dB}{du}$$

$$\frac{d}{du}(A\cdot B)=A\cdot\frac{dB}{du}+B\cdot\frac{dA}{du}$$

$$\frac{d}{du}(A\times B)=A\times\frac{dB}{du}+\frac{dA}{du}\times B$$

$$\frac{d}{du}(\phi B)=\phi\frac{dA}{du}+\frac{d\phi}{du}A$$

$$\frac{d}{du}(A\cdot B\times C)=A\cdot B\times\frac{dC}{du}+A\cdot\frac{dB}{du}\cdot C+\frac{dA}{du}\cdot B\times C$$

$$\frac{d}{du}\left\{A\times\left(B\times C\right)\right\}=A\times(B\times\frac{dC}{du})+A\times(\frac{dB}{du}\times C)+\frac{dB}{du}\times(B\times C)$$

التفاضل الجزئي للمتجهات :

$$\frac{\partial}{\partial x}(A+B)=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial x}$$

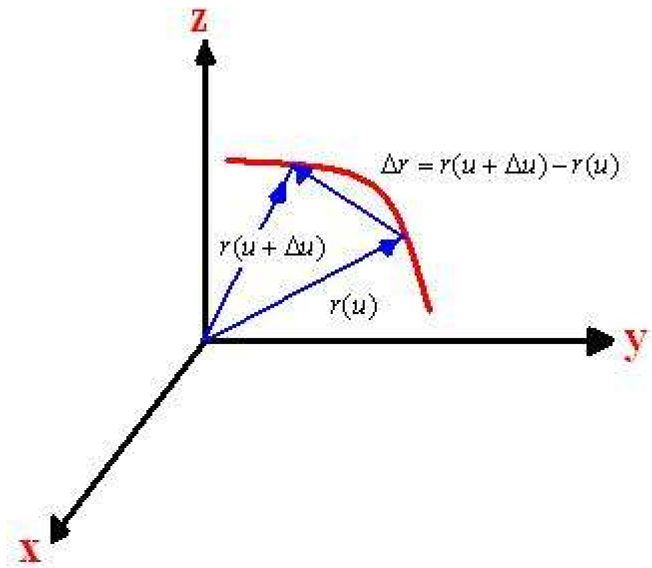
$$\frac{\partial}{\partial x}(A\cdot B)=A\cdot\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial x}\cdot B$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\times B)=A\times\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial x}\times B$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(A\cdot B)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(A\cdot B)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[A\cdot\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial x}\cdot B\right]=$$

$$=A\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial x\partial y}+\frac{\partial A}{\partial y}\cdot\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}\cdot B$$

المنحني الفضائي



$$r(u) = x(u)i + y(u)j + z(u)k$$

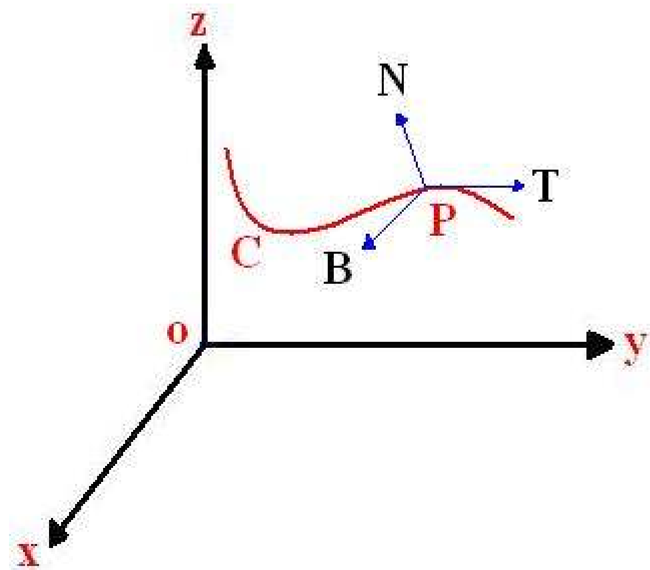
$$\frac{dr}{du} = \frac{dx}{du}i + \frac{dy}{du}j + \frac{dz}{du}k$$

لو كان المتغير u في هذه الرابطة الزمن و نرمز له بالحرف t في هذه الحالة :

سرعة النقطة في إنتهاء المتجهة r عند حركتها على المنحن هي : $\frac{dr}{dt} = v$

التعجيل هو : $\frac{d^2r}{dt^2} = a$

لو إن المتجة $r(u)$ تتحرك على المنحني الفضائي C و طول القوس من هذا المنحن هو l، و طول الجزء[1] من القوس dl . في هذه الحالة :



$$\frac{dT}{dl}=\kappa N$$

$$\frac{dN}{dl}=\tau B-\kappa T$$

$$\frac{dB}{dl}=-\tau N$$

المتجهة $\frac{dr}{dl}$ هي متجهة الوحدة و مماس على المنحن C في جهة أزدياد l، يرمز لهذه

المتجهة الوحدة بالحرف T أي : $T=\frac{dr}{dl}$، تغيرات T بالنسبة الى طول القوس $\frac{dT}{dl}$ هو

إنحناء المنحن في النقطة P و يرمز له بالحرف κ .

$$B=T\times N$$

1- element

$|\tau|$ ألتواء المنحن في النقطة P ، و هو عدد مثبت

$$T=\frac{dr}{dl}\Rightarrow\frac{dT}{dl}=\frac{d^2r}{dl^2}=\frac{d^2x}{dl^2}i+\frac{d^2y}{dl^2}j+\frac{d^2z}{dl^2}k$$

بما أن $\frac{dT}{dl}=\kappa N$ لذلك :

$$|\kappa|=\left|\frac{dT}{dl}\right|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dl^2}\right)^2}$$

لأن $|N|=1$.

التكامل الثنائي

عند محاسبة بعض التكاملات الثنائية نجبر لتغير المتغيرات في تلك التكاملات و ذلك للوصول الى روابط أسهل و كذلك تبسيط الناحيه التي يتم عليها حساب التكامل .

إذا كان التكامل في إحداثيات x و y و قمنا بتحول الإحداثيات الى u و v في هذه الحالة يصبح التكامل بهذه الصورة :

أولاً علينا تعين يعقوبية هذا التحويل و هي :

$$I=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}\\ \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

ثم يصبح التكامل بهذا الشكل :

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D^*} f\left(h_1(u,v),h_2(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

الناحيه D في الإحداثيات القديمة x و y ، في اللإحداثيات الجديدة u و v تصبح D^* .

مثال : ما هي نتيجة التكامل الثنائي :

$$I=\iint_D (x-y)\sin(x^2-y^2)dxdy$$

نستعين بتغير المتغير هذا :

$$\left.\begin{array}{l} x-y=u \\ \\ x+y=v \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=h_1(u,v)=\dfrac{u+v}{2} \\ \\ y=h_2(u,v)=\dfrac{u-v}{2} \end{array}\right.$$

يعقوبي التكامل هو :

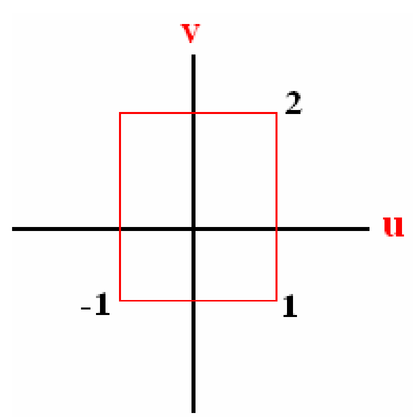
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

يعقوبي هذا التغير هو :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

يصبح هذا التكامل و الناحية D بهذا الشكل :

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} u\sin uv\,du\,dv$$



مثال : إذا كانت الناحيه S بين $y = x$ و $x+y=2$ و $x+y=1$ و $x^2 - y^2 = 1$ ما هي نتيجة هذا التكامل :

$$I = \iint_D e^{(x-y)(x+y)} dxdy$$

الحل :

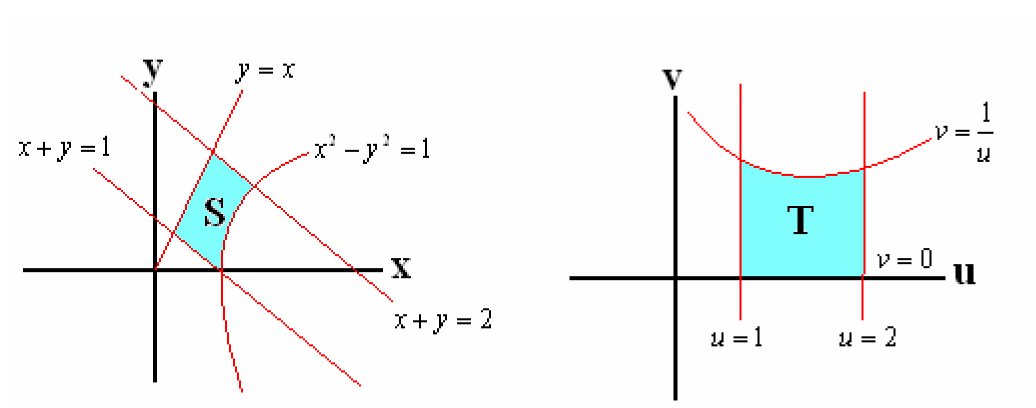
التغيرات و يعقوبية هذا التكامل هي :

$$\left.\begin{array}{l} x+y=u \\ x-y=v \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = h_1(u,v) = \dfrac{u+v}{2} \\ y = h_2(u,v) = \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}$$

إذن نتيجة هذا التكامل هو :

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{1}^{2} e^{uv} dudv$$

و الناحيه S تصبح :



التكامل الخطي

مثال : ما هي نتيجة هذا التكامل

$$I=\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$

على المسير C و هو مربع رؤسه $(0,1)$ و $(-1,0)$ و $(0,-1)$ و $(1,1)$ ؟

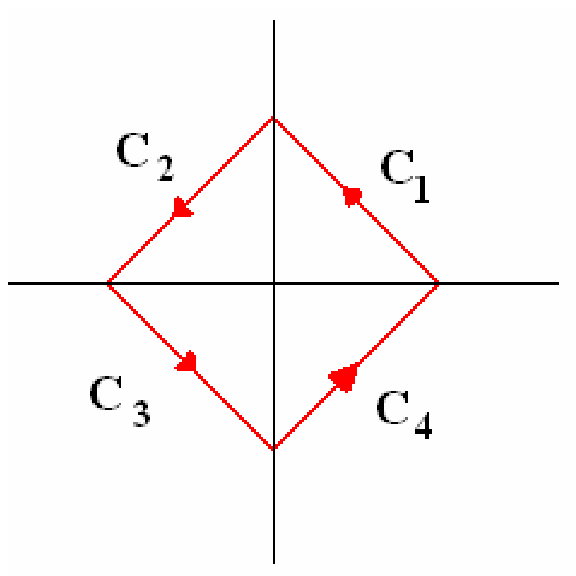
الحل :

$$c_1 : x+y=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$$

$$c_2 : y-x=1 \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=1-t \end{cases}$$

$$c_3 : x+y=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-1-t \end{cases}$$

$$c_4 : x-y=1 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t-1 \end{cases}$$



$$I=\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

$$I=\int_0^1 \frac{-1+1}{|1-t|+|t|}dt+\int_0^1 \frac{-1-1}{|-t|+|1-t|}dt+\int_{-1}^0 \frac{-1+1}{|t|+|1+t|}dt+\int_0^1 \frac{-1+1}{|t|+|t-1|}dt=0$$

مثال : ما هو نتيجة التكامل $\int_C xdx+ydy$ و المنحني C هو $y=x^2$ و بين النقطتين $(0,0)$ و $(1,1)$ ؟

الحل :

$$\int_C xdx+ydy \Rightarrow \int_0^1 (xdx+x^2.2xdx)=\int_0^1 (x+2x^3)dx=1$$

تكامل السطح

مثال : ما هي نتيجة التكامل $\iint_S xy^2z^3 d\sigma$ ؟ في هذا التكامل S سطح مكعب واقع في الثمن الأول و محدود بين الصفحات x = 1 و y = 1 و z = 1 .

الحل :

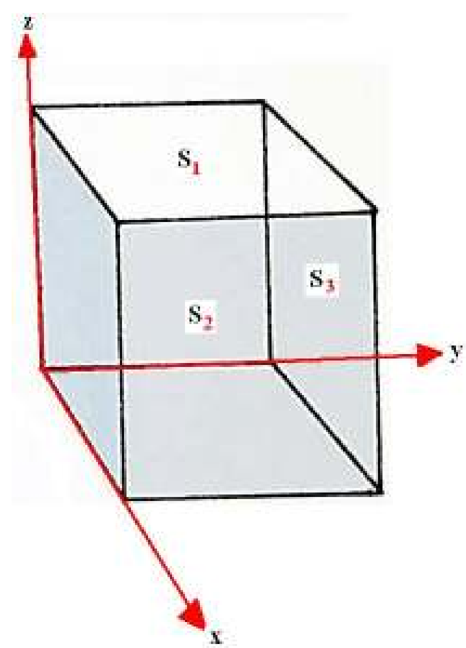
الداله $f(x,y,z) = xy^2z^3$

$A_1 : S_1 = g_1(x,y) = z = 1 \qquad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1$

$A_2 : S_2 = g_2(y,z) = x = 1 \qquad 0 \le y \le 1 \quad 0 \le z \le 1$

$A_3 : S_3 = g_3(x,z) = y = 1 \qquad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le z \le 1$

$$\iint_S xy^2z^3 d\sigma = \iint_{A_1} xy^2\sqrt{0+0+1}\,dxdy + \iint_{A_2} y^2z^3\sqrt{0+0+1}\,dydz + \iint_{A_3} xz^3\sqrt{0+0+1}\,dxdz$$



التكامل الثلاثي

تغير المتغير في التكامل الثلاثي شبيه التكامل الثنائي و الروابط هي بهذه الصورة :

إذا كانت الإحداثيات x و y و z و قمنا بتحويل الإحداثيات الى u و v و w يعقوبية التكاملات الثلاثيه هي :

$$I=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial h_1(u,v,w)}{\partial u} & \frac{\partial h_1(u,v,w)}{\partial v} & \frac{\partial h_1(u,v,w)}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2(u,v,w)}{\partial u} & \frac{\partial h_2(u,v,w)}{\partial v} & \frac{\partial h_2(u,v,w)}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2(u,v,w)}{\partial u} & \frac{\partial h_2(u,v,w)}{\partial v} & \frac{\partial h_2(u,v,w)}{\partial w} \end{vmatrix}$$

يصبح التكامل الثلاثي بهذا الشكل :

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{D^*} f(h_1(u,v,w),h_2(u,v,w),h_3(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

الناحيه D في الإحداثيات القديمة x و y و z، و في الإحداثيات الجديدة u و v و w تصبح D^* .

مثال : ما هي يعقوبية الإحداثيات الكرويه ؟

تحويل الإحداثيات الكارتيزيه الى الإحداثيات الكرويه :

$$z=r\cos\phi \quad \text{و} \quad y=r\sin\theta\sin\phi \quad \text{و} \quad x=r\cos\theta\sin\phi$$

في هذا التحويل أصبح :

$$w=\phi \quad \text{و} \quad v=\theta \quad \text{و} \quad u=r$$

كذلك :

$$x = h_1(u,v,w) \quad \text{و} \quad y = h_2(u,v,w) \quad \text{و} \quad z = h_2(u,v,w)$$

$$I = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\left(r\cos\theta\sin\phi\right)}{\partial r} & \dfrac{\partial\left(r\cos\theta\sin\phi\right)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\left(r\cos\theta\sin\phi\right)}{\partial\phi} \\ \dfrac{\partial\left(r\sin\theta\sin\phi\right)}{\partial r} & \dfrac{\partial\left(r\sin\theta\sin\phi\right)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\left(r\sin\theta\sin\phi\right)}{\partial\phi} \\ \dfrac{\partial\left(r\cos\phi\right)}{\partial r} & \dfrac{\partial\left(r\cos\phi\right)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\left(r\cos\phi\right)}{\partial\phi} \end{vmatrix}$$

$$I = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix} = r^2\sin\phi$$

جزء الحجم الكروي هو : $dv = r^2\sin\phi dr d\theta d\phi$ إذن لمحاسبة حجم الكره من خلال التكامل الثلاثي نعمل بهذا الشكل :

$$V = \iiint dv = \iiint r^2\sin\phi dr d\theta d\phi = 8\int_0^r r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi d\phi$$

$$V = 8\times\frac{r^3}{3}\times\frac{\pi}{2}\times\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

التحليل المتجهي

أهم مفاهيم التحليل المتجهي :

متجه[1] **:** أي كمية يكون لها مقدار و أتجاه ، كما مثلاً سرعة في مقابل السرعة العددية [**] .

الحقل[2] – أو المجال في الفيزياء لتعين الفضاء أو جزء من الفضاء الذي يحدث فيه حدث فيزيائي ، كحقل درجة الحرارة أو حقل القوى .
الحقل : كمية فيزيائية تعني إمكانية التأثير بقوة على بعد ، مثل مجال الجاذبيه ، و المجال الكهربائي ، و المجال المغناطيسي [*] .

المنحن المتجهي[3] – عباره عن منحنيات المماس في أي نقطة على هذه المنحنيات منطبق على متجهة الحقل .

الفيض[4] – هو قيمة (قوة ، مائع ، حرارة ،...) في وحدة الزمن ، عمود على وحدة السطح. الفيض المتجهي عبارة عن كميه سُلّميه . إذا كانت $d\sigma$ جزء من مساحة السطح و a متجه، الفيض المتجهي هو $\oiint_S a d\sigma$.

الفيض : كمية تتناسب مع التكامل السطحي لشدة قوى المجال العمودية على السطح ، في مساحة معينة [*] .

التدرج[5] – متجهة سرعة تغيرات داله سُلّميه ، في جهة ، بحيث قيمة هذه السرعة هي قيمة عظمى.

التدرج : عند نقطة ، في مجال لا متجه ، هو المتجه في أتجاه أعلى معدل لزيادة المجال مع المسافة [*] .

التدرج – عباره عن متجهة في أمتداد العمود على السطح ، و يرمز لها $gradF$ و قيمتها العدديه تساوي سرعة تغيرات F في جهة القائم على السطح و هذه السرعة قيمة عظمى .

التدرج : هو المتجه الذي مركباته ، الموازية لمحاور الإحداثيات ، هي المشتقات الجزئية لدالة معطاة بالنسبة للمتغيرات المستقلة ، بحيث يكون أتجاه مركبته على أحد محاور الإحداثيات هو ذلك الذي يكون فيه المشتق ، بالنسبة للمتغير المقابل لذلك المحور ، أعظمياً ، و هو المتجه

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$$

و غالباً ، يجب أن تكون المشتقات الجزئية مستمرة ، و في هذه الحالة ، يتطابق التدرج مع مشتق الدالة المتجهية . و يكتب التدرج بالشكل $gradF$ و ∇F [**]

التباعد[6] – كميه سُلميه ، تبين الكثافه النوعيه لمنبع أو مصب حقل متجهي .

الدوران[7] – متجه ، و هي تقريباً دوران متجه مارة من وحدة السطح ، و في جهة بحيث، هذا الدوان هو حدّ أكثر .

1- vector 2- field 3- vector curve 4- flux 5- gradient
6- divergence 7- curl or rotation

* - معجم الفيزياء (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. أبراهيم حموده، أكاديما.

** - معجم الرياضيات (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. علي مصطفى بن الأشهر، أكاديما.

التدرج :
F سُلّميه

$$gradF = \nabla \times F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k$$

التباعد :
F متجه

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$$

الدوران :
F متجه

$$curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

مؤثر دلتا:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

مؤثر لابلاس :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$div(curlF) = \nabla \cdot (\nabla \times F)$$

$$\vec{F} \times \nabla \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{F}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = (\nabla \cdot \nabla)\phi = \nabla^2 \phi$$

$$\nabla^2 F = div grad F$$

إذا كان $F(x,y,z)=0$ إذن :

$$\left.\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz \\ dl &= dx\cdot i + dy\cdot j + dz\cdot k \end{aligned}\right\} \Rightarrow du = grad F \cdot dl$$

إذا كانت A متجه و ϕ سُلّميه إذن :

$$\nabla\cdot(\phi A) = (\nabla\phi)\cdot A + \phi(\nabla\cdot A)$$

دالة حقل بهذا الشكل :

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

في هذه الحالة :

$div\vec{F} < 0 \Rightarrow$ حقل محدب

$div\vec{F} > 0 \Rightarrow$ حقل مقعر

$div\vec{F} = 0 \Rightarrow$ حقل مسطح

مبرهنة غرين Green's Theorem : نفرض أن الدوال P و Q دوال ذات متغيرين و مشتقاتها الجزئيه في الناحية D مستمرة . إذا كان المنحن C في الناحيه D إذن:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)ds$$

تحول هذه المبرهنة التكامل الخطي حول منحن مغلق مثل C الى تكامل ثنائي على الصفحة و محدود بالسطح S المحصور بالمنحني C .

مثال : إثبت أن السطح المحدود بأي منحن مغلق مثل C يساوي $\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$

إثبات :

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = -y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 \\[2ex] Q(x,y) = x \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

$$\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)ds = \frac{1}{2}\iint_S 2ds = \iint_S ds$$

و التكامل $\iint_S ds$ هو مساحة السطح S المحدودة بالمنحني C

مبرهنة غاوس ـ أستروغرادسكي Gauss – Ostrogradsky Theorem: الفيض المتجهي A على سطح مغلق مثل S هو :

$$\oiint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})ds = \iiint_V divF dv$$

S السطح ، V الحجم ، ds جزء السطح ، dv جزء الحجم ، F حقل متجهي ، $divF$ تباعُد F.

تحول هذه المبرهنة فيض الحقل المتجهي من سطح مغلق الى تكامل تباعد الحقل المحدود بحجم ذلك السطح .

مثال : إذا كان $F = xi + yj + zk$ و السطح كره نصف قطرها R و معادلتها $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\vec{F} = xi + yj + zk \Rightarrow div\vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

التكامل على حجم الكره :

$$\iiint_V div\vec{F}dv = \iiint_V 3dv = 3\times\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$$

$$\iiint_V div\vec{F}dv = 4\pi R^3$$

إذا كانت n متجة الوحدة في هذه الحالة :

$$n=\frac{gradF}{\left|gradF\right|}=\frac{xi+yj+zk}{\left|xi+yj+zk\right|}=\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{xi+yj+zk}{R}$$

هذه المتجهة عمود على السطح و أحياناً في بعض المصادر يكتب جزء السطح بهذا الشكل:

$$d\sigma=n\cdot ds$$

إذن :

$$\vec{F}\cdot\vec{n}ds=(xi+yj+zk)\cdot\frac{xi+yj+zk}{R}ds=\frac{x^2+y^2+z^2}{R}ds=\frac{R^2}{R}d\sigma=Rds$$

التكامل على سطح الكره :

$$\oiint_S(\vec{F}\cdot\vec{n})ds=\oiint_S Rds=R\oiint_S ds=R(4\pi R^2)=4\pi R^3$$

$$\oiint_S(\vec{F}\cdot\vec{n})ds=4\pi R^3$$

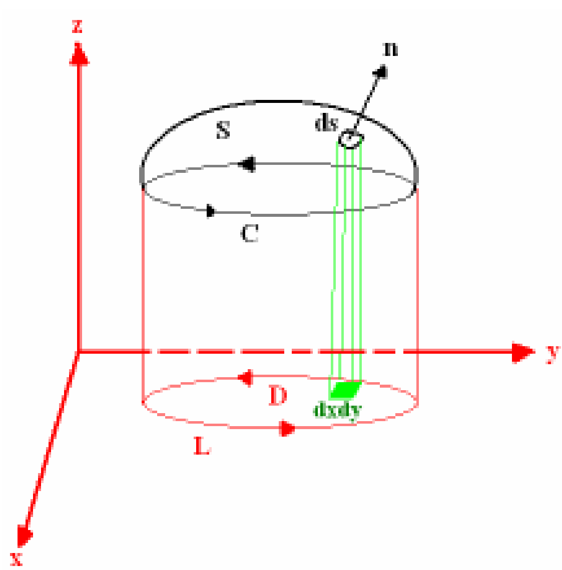
كما نلاحظ تساوي الحالتين .

مبرهنة ستوكس Stoke's Theorem : دوران المتجه A حول المنحن L هو :

$$\oint_C A\cdot dr=\iint_S curlA\cdot nds$$

تحول هذه المبرهنة التكامل الخطي لحقل متجهي حول المنحن المغلق C الى تكامل ثنائي لسطح محدود بالمنحني C .

A متجه ، C منحن مغلق ، S السطح المحصور أو المحدود بالمنحن C ، n متجه الوحدة لجزء السطح ds و $dr=dxi+dyj+dzk$. (المنحن C هو المنحني المحيط بالسطحS)



مثال : نفرض S هي نصف كره $x^2+y^2+z^2=1$ و $z\geq 0$ و المتجه A هي : $\vec{A}=(2x-y)i-yz^2j-y^2zk$ ، المطلوب تحقيق صحة مبرهنة ستوكس .

المنحن C هو دائره معادلتها $x^2+y^2=1$ و معادلة هذه الدائره هي كذلك : $y=\sin t$ و $x=\cos t$ لذا :

$$A\cdot dr=\left[(2x-y)i-yz^2j-y^2zk\right]\cdot\left[dxi+dyj+dzk\right]=(2x-y)dx-yz^2dy-y^2zdz$$

$$\oint_C A\cdot dr=\oint_C (2x-y)dx-yz^2dy-y^2zdz=\int_0^{2\pi}(2\cos t-\sin t)(-\sin t)dt=\pi$$

$$\oint_C A\cdot dr=\pi$$

$$curlA=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix}=k$$

$$\iint_S curlA\cdot nds=\iint_S k\cdot nds=\iint_S ds$$

$$k\cdot n=1$$

التكامل الأخير $\iint_S ds$ هو مساحة الدائره المحدودة بالمنحن C و الذي كان الدائرة $x^2+y^2=1$ إذن :

$$\iint_S curlA\cdot nds=\pi$$

تساوي هذه النتيجتين تأكد صحة مبرهنة ستوكس لهذه المتجهة و هذا السطح .

الصيغه المتجهيه لمبرهنة غرين

نفرض المتجهة A

$$\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

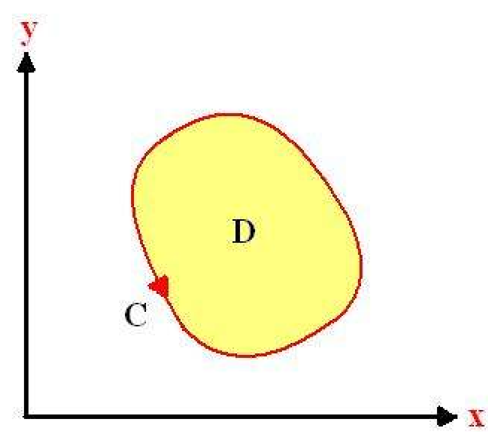
$$\vec{r} = xi + yj \Rightarrow dr = dxi + dyj$$

$$Pdx + Qdy = (Pi + Qj)(dxi + dyj) = A \cdot dr$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial Q}{\partial z} i + \frac{\partial P}{\partial z} j + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})k$$

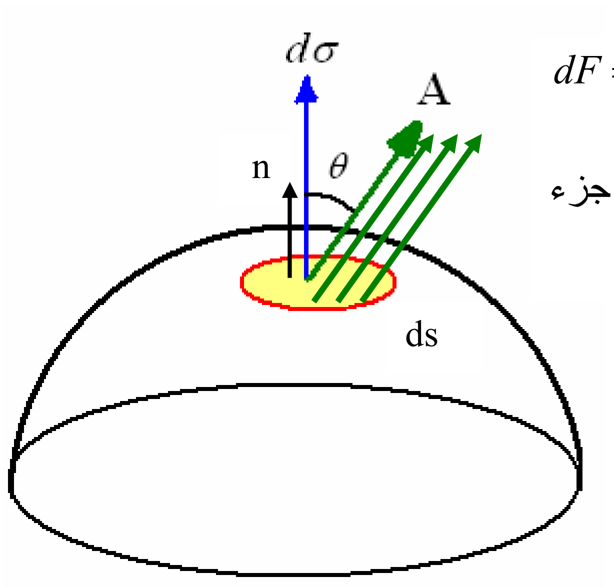
$$(\nabla \times A) \cdot k = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\oint_C A \cdot dr = \iint_D (\nabla \times A) \cdot kdS$$



الفيض Flux:

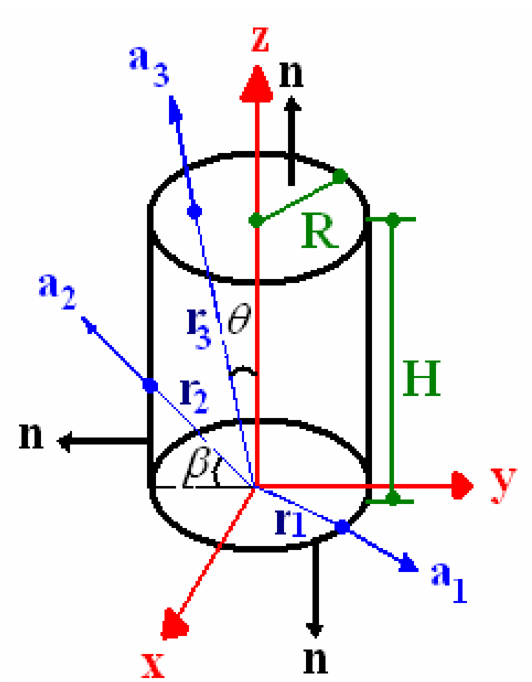
تصور متجه تنفذ من سطح خاص ، يمكن أن تكون تلك المتجه سرعة مائع ، أو تشعشع حراري ، أو مغناطيسي ، الفيض المتجهي dF للمتجهة A النافذ من جزء السطح $d\sigma$ هو :



$$dF = A \cdot d\sigma = A \cdot n ds \Rightarrow dF = A \cos\theta ds$$

n متجهة الوحدة (عمود على عنصر أو جزء السطح)

مثال : الفيض على أسطوانه نصف قطرها R و أرتفاعها H و مركز القاعده السفلى منطبق على مركز الإحداثي .



$$r_1 = R \Rightarrow a_1 \cdot n = r_1 \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$r_2 = \frac{R}{\cos\beta} \Rightarrow a_2 \cdot n = r_2 \cos\beta = R$$

$$r_3 = \frac{H}{\cos\theta} \Rightarrow a_3 \cdot n = r_3 \cos\theta = H$$

$$\oiint_S a d\sigma = \iint_{S_1} a d\sigma + \iint_{S_2} a d\sigma + \iint_{S_3} a d\sigma$$

سطح الأسطوانهS يساوي مجموع سطح القاعده العليا (S_3) و السطح الجانبي (S_2) و سطح القاعة السفلى (S_1) إذن :

$$\oiint_S a d\sigma = \iint_{S_1} a_1 \cdot n ds + \iint_{S_2} a_2 \cdot n ds + \iint_{S_3} a_3 \cdot n ds$$

$$\oiint_S a d\sigma = 0 + R \iint_{S_2} ds + H \iint_{S_3} ds$$

$$\oiint_S a d\sigma = R(2\pi RH) + H(\pi R^2) = 3H\pi R^2$$

إذن الفيض على سطح الأسطوانه يساوي $3H\pi R^2$

التحليل المتجهي في مختلف الإحداثيات

في هذه الجداول قوانين التحليل المتجهي لمختلف الإحداثيات ، المنحنيه و الكارتيزيه و الأسطوانيه و الكرويه . تعتبر الإحداثيات المنحنيه أحداثيات عموميه و يمكن أستنتاج سائر الإحداثيات من الإحداثيات المنحنيه .

الإحداثيات في الإحداثيات المنحنيه هي u_1 و u_2 و u_3 . يمكن أستنتاج الإحداثيات الكارتيزيه من الإحداثيات المنحنيه و ذلك من خلال هذه التحويلات :

$$u_1 = x \quad \text{و} \quad du_1 = dx$$

$$u_2 = y \quad \text{و} \quad du_2 = dy$$

$$u_3 = z \quad \text{و} \quad du_3 = dz$$

$$h_i = \frac{ds_i}{du_i} \Rightarrow i = 1 \Rightarrow h_1 = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$h_i = \frac{ds_i}{du_i} \Rightarrow i = 2 \Rightarrow h_2 = \frac{dy}{dy} = 1$$

$$h_i = \frac{ds_i}{du_i} \Rightarrow i = 3 \Rightarrow h_3 = \frac{dz}{dz} = 1$$

dl جزء الطول

dv جزء الحجم

$d\sigma$ جزء السطح

القانون	نوع الإحداثيات
	الإحداثيات المنحنيه u_1 و u_2 و u_3
h_1 h_2 h_3	$h_i = \frac{ds_i}{du_i} = \frac{\lvert\partial r\rvert}{\lvert\partial u_i\rvert}$ $i = 1, 2, 3$
dl	$\sqrt{h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2}$
dv	$h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$
$d\sigma$	$d\sigma_1 = h_2 h_3 du_2 du_3$ $d\sigma_2 = h_1 h_3 du_1 du_3$ $d\sigma_3 = h_1 h_2 du_1 du_2$
$\vec{\nabla}$	$\frac{\vec{u}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\vec{u}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\vec{u}_3}{h_3}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{u_3}$

القانون	نوع الإحداثيات الإحداثيات الكارتيزيه x و y و z	الإحداثيات الأسطوانيه r و ϕ و z	الإحداثيات الكرويه r و ϕ و θ
h_1 h_2 h_3	1 1 1	$h_r = 1$ $h_\phi = r$ $h_z = 1$	$h_r = 1$ $h_\theta = r$ $h_\phi = r\sin\theta$
dl	$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$	$\sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2}$	$\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2}$
dv	$dxdydz$	$rdrd\phi dz$	$r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$
$d\sigma$	$d\sigma_x = dzdy$ $d\sigma_y = dxdz$ $d\sigma_z = dxdy$	$d\sigma_r = rd\phi dz$ $d\sigma_\phi = drdz$ $d\sigma_z = rd\phi dz$	$d\sigma_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ $d\sigma_\theta = r\sin\theta drd\phi$ $d\sigma_\phi = rdrd\theta$
$\vec{\nabla}$	$\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$	$\vec{u}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \vec{u}_z\frac{\partial}{\partial z}$	$\vec{u}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{u}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$

القانون	نوع الإحداثيات
	الإحداثيات المنحنيه u_1 و u_2 و u_3
$grad\Psi =$ $\vec{\nabla}\Psi$	$\frac{\vec{u}_1}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}+\frac{\vec{u}_2}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}+\frac{\vec{u}_3}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}$
$div\vec{F} =$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$	$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3F_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3F_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2F_3)\right]$
$curl\vec{F} =$ $\vec{\nabla}\times\vec{F}$	$\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{u}_1 & h_2\vec{u}_2 & h_3\vec{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}$
$Laplacian$ $\nabla^2\Psi$	$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1})+\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2})+\frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3})\right]$

القانون	نوع الإحداثيات		
	الإحداثيات الكارتيزيه x و y و z	الإحداثيات الأسطوانيه r و ϕ و z	الإحداثيات الكرويه r و ϕ و θ
$grad\Psi =$ $\vec{\nabla}\Psi$	$\vec{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\Psi}{\partial z}$	$\vec{u}_r\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\vec{u}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}+\vec{u}_z\frac{\partial\Psi}{\partial z}$	$\vec{u}_r\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\vec{u}_\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+\frac{\vec{u}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}$
$div\vec{F} =$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_x)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+$ $+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$
$curl\vec{F} =$ $\vec{\nabla}\times\vec{F}$	$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\vec{u}_r}{r} & \vec{u}_\phi & \frac{\vec{u}_z}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\phi & F_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\vec{u}_r}{r^2\sin\theta} & \frac{\vec{u}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\vec{u}_\phi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ F_r & rF_\theta & (r\sin\theta)F_\phi \end{vmatrix}$
$Laplacian$ $\nabla^2\Psi$	$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+$ $+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})+$ $+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+$ $+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$

بعض مصطلحات التحليل المتجهي

(إنجليزي - عربي)

Binormal	ناظم (أو قائم) مزدوج
Boundray	حدّ
Change of variable	تغيير المتغير
Component	مرّكبه
Concave	مقعر
Concavity	تقعر
Connected	مترابط
Continuous	مستمر
Convex	محدب
Cross product	جداء تقاطعي أو جداء خارجي
Curl , rotation	دوران
Curvature	إنحناء
Curve	منحني
Cylindrical coordinates	إحداثيات أسطوانيه
Determinant	محددة
Divergence	تباعُد
Divergence theorem	أسم آخر لمبرهنة غاوس - أستروغرادسكي
Dot product	جداء نقطي أو جداء داخلي
Double integral	تكامل ثنائي
Fluid	مائع أو سيال

Fluid mechanics	ميكانيك الموائع
Flux	الفيض
Function	داله
Gauss-Ostrogradsky theorem	مبرهنة غاوس - أسترو غرادسكي
Gradient	تدرُّج
Green's theorem	مبرهنة غرين
Jacobian	يعقوبية
Lapacian operator	مؤثر لابلاس
Line integral	تكامل خطي
Multiple integral	تكامل مضاعف
Normal	ناظمي (أو عمود)
Normal to plan	ناظمي (أو عمود) على الصفحة
Normal to surface	ناظمي (أو عمود) على السطح
Octan	ثُمن
Operator	مؤثر
Orthonormal	ناظمي التعامد
Polar coordinates	إحداثيات قطبيه
Principle normal	ناظم رئيسي
Product inner	جداء داخلي
Radius of curvature	نصف قطر الإنحناء
Radius of torsion	نصف قطر الألتواء
Scalar field	حقل سُلّمي

Scalar function	داله سُلّميه
Scalar product	جداء سُلّمي أو جداء داخلي
Simple closed curve	منحن بسيط مغلق
Simply – connected	مترابطه بسيطه
Sink	ثقب (ينفذ منه شئ) ثقب ينفذ منه الماء أو ثقب تنفذ منه الحرارة
Source	منبع (يصدر منه شئ) منبع ماء ، أو منبع حراري
Spherical coordinates	إحداثيات كرويه
Stoke’s theorem	مبرهنة ستوكس
Surface	سطح
Surface integral	تكامل سطح
Torsion	ألتواء
Trajectory	مسار
Trihedral	ثلاثي سطوح
Triple integral	تكامل ثلاثي
Unite Vector	متجهة الوحدة
Vector	متجه
Vector field	حقل متجهي
Vector function	داله متجهيه
Vector product	جداء متجهي
Volume integral	تكامل حجم

بعض مصطلحات التحليل المتجهي

(عربي - إنجليزي)

Cylindrical coordinates	إحداثيات أسطوانيه
Polar coordinates	إحداثيات قطبيه
Spherical coordinates	إحداثيات كرويه
Divergence theorem	أسم آخر لمبرهنة غاوس - أستروغرادسكي
Torsion	ألتواء
Curvature	إنحناء
Divergence	تباعُد
Gradient	تدرُّج
Change of variable	تغيير المتغير
Concavity	تقعر
Triple integral	تكامل ثلاثي
Double integral	تكامل ثنائي
Volume integral	تكامل حجم
Line integral	تكامل خطي
Surface integral	تكامل سطح
Multiple integral	تكامل مضاعف
Trihedral	ثلاثي سطوح
Octan	ثُمن
Cross product	جداء تقاطعي أو جداء خارجي
Product inner	جداء داخلي

Scalar product	جداء سُلّمي أو جداء داخلي
Vector product	جداء متجهي
Dot product	جداء نقطي أو جداء داخلي
Boundray	حدّ
Scalar field	حقل سُلّمي
Vector field	حقل متجهي
Function	داله
Scalar function	داله سُلّميه
Vector function	داله متجهيه
Curl , rotation	دوران
Surface	سطح
Flux	فيض
Operator	مؤثر
Lapacian operator	مؤثر لابلاس
Fluid	مائع أو سيال
Stoke's theorem	مبرهنة ستوكس
Gauss-Ostrogradsky theorem	مبرهنة غاوس - أسترو غرادسكي
Green's theorem	مبرهنة غرين
Vector	متجه
Unite Vector	متجهة الوحدة
Connected	مترابط
Simply – connected	مترابطه بسيطه

Convex	محدب
Determinant	محددة
Component	مركبه
Trajectory	مسار
Continuous	مستمر
Sink	مصب (ينفذ منه شئ) مصب ينفذ منه الماء أو تنفذ منه الحرارة
Concave	مقعر
Source	منبع (يصدر منه شئ) منبع ماء ، أو منبع حراري
Simple closed curve	منحن بسيط مغلق
Curve	منحني
Fluid mechanics	ميكانيك الموائع
Binormal	ناظم (أو قائم) مزدوج
Principle normal	ناظم رئيسي
Normal	ناظمي (أو عمود)
Normal to surface	ناظمي (أو عمود) على السطح
Normal to plan	ناظمي (أو عمود) على الصفحة
Orthonormal	ناظمي التعامد
Radius of torsion	نصف قطر الألتواء
Radius of curvature	نصف قطر الإنحناء
Jacobian	يعقوبية

المصادر

- Schaums Mathematical Handbook of Formulas and Tables
- Vector Calculus, Jerrold E. Marsden, Antony J. Tromba, 4th Edition
- Multiple Integrals Field Theory and Series, Budak B.M., Fomin S.V. , Mir , Moscow 1973 .
- معجم الفيزياء (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. أبراهيم حموده، أكاديما.
- معجم الرياضيات (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. علي مصطفى بن الأشهر، أكاديما.

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com